Apresentação

Caros professores orientadores e alunos do Programa de Iniciação Científica – OBMEP 2007

Esta é a 2ª edição do número especial da **Revista do Professor de Matemática** – **RPM**, que foi inicialmente elaborado para utilização no Estágio da 2ª edição da OBMEP, finalizado em maio/junho de 2008.

Esta 2ª edição será utilizada no Programa de Iniciação Científica – OBMEP 2007, com início em junho de 2008.

A **RPM**, como seu nome diz, é uma revista dedicada aos professores de Matemática da educação básica, a alunos e professores de cursos de licenciatura em Matemática e a todos aqueles que se interessam pela Matemática do nível médio. O tratamento dado aos temas abordados procura ser acessível e agradável, sem sacrificar o rigor. A revista é uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM e tem sido editada e distribuída sem interrupções desde 1982.

A revista publica crônicas, artigos e seções, como *Problemas*, *O leitor pergunta*, *Livros*, *Olhando mais de cima*, etc. Nos artigos, temas interessantes de nível elementar ou avançado são apresentados de modo acessível ao professor e ao aluno do ensino médio ou de cursos de Licenciatura em Matemática. Uma experiência interessante em sala de aula, um problema que suscita uma questão pouco conhecida, uma história que mereça ser contada ou até uma nova abordagem de um assunto conhecido podem compor um artigo da revista. Nas seções, a revista "conversa" com os leitores, publicando problemas e/ou soluções propostas por eles, cartas, resenhas de livros, erros encontrados em textos didáticos, etc., sempre visando ao aperfeiçoamento do trabalho do professor na sua sala de aula.

Para este exemplar especial, o Comitê Editorial da **RPM** escolheu artigos que pretendem ampliar o conhecimento dos alunos em diferentes tópicos, bem como temas que motivem discussões ou satisfaçam a curiosidade teórica e histórica de alunos interessados em Matemática. Por exemplo, as cônicas são tratadas de modo “prático” no texto *Sorrisos, sussurros, antenas e telescópios*; a intuição é desafiada em diferentes situações no texto *Quando a intuição falha*; a análise combinatória é utilizada para discutir a funcionalidade da brincadeira *Amigo oculto* (ou *secreto*), etc.

Apresentamos também uma seleção de 30 problemas, cuidadosamente escolhidos entre os publicados na seção *Problemas*, que abrangem a maioria dos tópicos do ensino médio. As soluções dos problemas propostos estão no fim da revista. Para o ensino fundamental, e também para o ensino médio, selecionamos 30 ...probleminhas, parte integrante da seção *Problemas* dos números usuais da revista. Os probleminhas são caracterizados por exigir muito pouco conhecimento de conteúdo específico, apenas raciocínio lógico-dedutivo e domínio de operações elementares. É a parte lúdica, permitindo que professores e alunos se divirtam, resolvendo problemas desafiadores, e se sintam realizados ao obter as soluções. As respostas dos probleminhas também estão no final da revista.

Os artigos aqui apresentados não estão com as referências bibliográficas: elas podem ser encontradas nos exemplares originais da **RPM**.

Comitê Editorial da **RPM**

Conteúdo

Como escolher namorada pelo horário dos trens

João amava Lúcia, que amava João. Só que João, além de amar Lúcia, também amava Letícia e tentava namorar as duas ao mesmo tempo. Durante a semana, até que dava, mas quando chegava o sábado à noite era terrível. As duas queriam João e este não possuía o dom da presença ao mesmo tempo em dois lugares. Assim, alternadamente, ou Lúcia ou Letícia ficava sem sair com João, nos embalos de sábado à noite. Honesto, João decidiu informar Lúcia sobre a existência de Letícia e Letícia sobre Lúcia. Com choros e lamúrias de todos os lados, João continuou dividido, sem saber quem escolher.

João usava como meio de transporte os trens metropolitanos. Para visitar Lúcia, João pegava trens que iam no sentido da direita e para visitar Letícia pegava trens que iam para a esquerda. Quanto a horários não havia dúvidas: trens para cada lado de meia em meia hora. Mas como escolher entre Lúcia e Letícia?

Letícia, que era professora de Matemática, propôs a João um critério justo, equânime, salomônico para escolher entre as duas namoradas. A proposta foi: João iria para a estação de trens sem nenhuma decisão. Ao chegar pegaria o primeiro trem que passasse, fosse para a direita, fosse para a esquerda. Proposta aceita, João começou a usar esse critério aparentemente justo e aleatório. Depois de usar o critério por cerca de três meses, descobriu que visitara Letícia muito mais que Lúcia, e, se a sorte quis assim, ficou com Letícia e com ela se casou sem nunca haver entendido por que a sorte a privilegiara tanto. Só nas bodas de prata do seu casamento é que Letícia contou a João a razão de o trem a ter escolhido muito mais vezes que a concorrente. Letícia estudara os horários dos trens e verificara que os horários eram:

Trens para a esquerda (Letícia): 8h00; 8h30; 9h00; 9h30; ...

Trens para a direita (Lúcia): 8h05; 8h35; 9h05; 9h35; ...

Ou seja, considerando, por exemplo, o intervalo de tempo, 8h00 – 8h30, o horário H de chegada na estação, que faria João tomar o trem para a direita, deveria ser tal que 8h00 < H < 8h05. Se 8h05 < H < 8h30, João pegaria o trem para a esquerda. A situação se repete em qualquer outro intervalo de 30 minutos: 25 minutos são favoráveis ao trem da esquerda e 5 minutos ao da direita.

Na guerra como no amor tudo vale..., até usar Matemática.

Baseado no artigo
Como escolher namorada pelos
horários do trem do subúrbio
Manoel Henrique Campos Botelho, **RPM** 14

Quando a intuição falha

Problema 1

Suponhamos que seja possível colocar uma corda circundando a Terra, ajustando-a ao equador. Em seguida, retiramos essa corda, aumentamos 1 m no seu comprimento e a recolocamos em volta da Terra, formando uma circunferência concêntrica com o equador. Sabendo que o raio da Terra é aproximadamente igual a 6 355 000 m, teríamos substituído uma corda de aproximadamente 2 x 3,14 x 6 355 000 m = 39 909 400 m por uma de 39 909 401 m. Assim, teremos um vão entre o equador e a corda, ou melhor, uma diferença d entre os raios das duas circunferências.

Então, perguntamos: usando-se somente a intuição, qual é o valor aproximado de d? Ou seja, qual é a largura aproximada desse vão entre o equador e a corda? Cremos que o leitor dirá: não existe vão algum... É desprezível essa diferença... Como a Terra é tão grande e só se aumentou um metro na corda, é claro que o vão é muito pequeno e, por conseguinte, desprezível... Será?

Solução

Vamos calcular o valor de d:

$$2\pi R - 2\pi R_T = 1 \quad \text{ou}$$

$$d = R - R_T = 1/2\pi \approx 0{,}16 \text{ m} = 16 \text{ cm!}$$

Notamos que d é independente do raio, independente, portanto, do comprimento da circunferência. Que tal fazer algumas experiências?

Problema 2

Passemos, agora, ao segundo exemplo: consideremos um círculo com raio igual ao raio da Terra. Suponhamos ser possível cobrir toda a superfície desse círculo por uma outra superfície, modelável, ajustada a ele. Retiramos, em seguida, essa segunda superfície, aumentamos sua área de $1\ m^2$ e a remodelamos, até se transformar novamente num círculo, com área $1\ m^2$ maior. Em seguida, justapomos os dois discos de modo a obter dois círculos concêntricos. Assim, haverá uma diferença D entre os raios dos dois círculos. Perguntamos novamente: usando-se apenas a intuição, qual é o valor aproximado de D?

Cremos que o leitor, dessa vez, alertado pelo problema anterior, teria maior cautela para emitir um juízo, baseado apenas em sua intuição. Deixamos o cálculo de D para o leitor que deve concluir que, agora, D depende do raio e que decresce na medida em que o raio cresce.

Problema 3

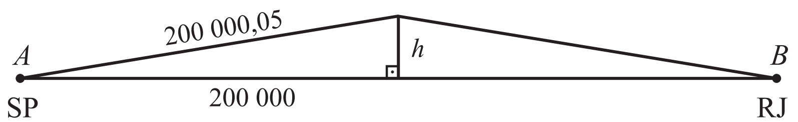
Tome uma corda esticada, medindo 400 km, unindo dois pontos, A e B, um em SP e outro no RJ. Tome outra corda com 1 m a mais do que a anterior e fixe suas extremidades nos mesmos pontos A e B. Como ela fica bamba, coloque uma estaca de modo a mantê-la esticada. Considere a estaca no

a) ponto médio da corda.

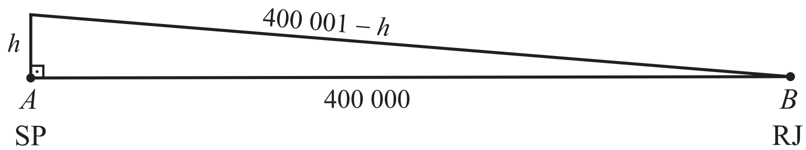
b) ponto A correspondente a SP.

Qual a altura, h, dessa estaca? É maior ou menor que 1 m?

a)



b)



Solução

a) No triângulo retângulo de hipotenusa medindo 400 001/2 m e cateto maior medindo 400 000/2, temos, por Pitágoras:

$(200\,000{,}05)^2 - 200\,000^2 = h^2$, logo,

$h^2 = (200\,000{,}05 - 200\,000)(200\,000{,}05 + 200\,000)$, ou $h \approx 447$ m. Ou seja, a estaca é da altura de um prédio de aproximadamente 127 andares!

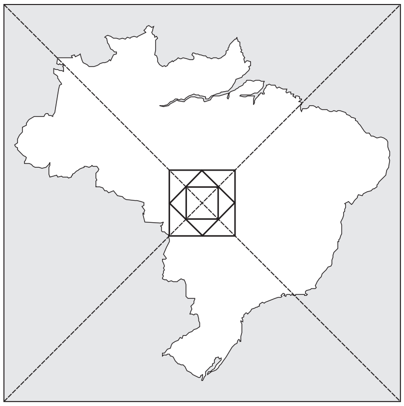
b) Neste caso, o triângulo retângulo tem cateto maior medindo 400 000 m, e a soma dos comprimentos da hipotenusa e do cateto menor, h, é igual a 400 001 m. Por Pitágoras:

$$400\,000^2 + h^2 = (400\,001 - h)^2 \quad \text{ou} \quad h = 0{,}999 \text{ m} \approx 1\text{m!}$$

Perplexos com os resultados?

Problema 4

Quantos quadrados são necessários para "cobrir" o Brasil, supondo o processo indicado na figura em que o quadradinho inicial tem 1 cm de lado e o quadrado externo tem lado igual a 4.500 km?



Antes de resolver, faça estimativas do resultado e compare com os palpites de seus colegas.

Solução

1º quadrado: 1 cm de lado
3º quadrado: 2 cm de lado
5º quadrado: 4 cm de lado
...
...
$(2n + 1)$º quadrado: 2^n cm de lado.

Por tentativas, verifica-se que $2^{29} = 536\,870\,912$ é a primeira potência maior que 450 000 000 (4 500 km = 450 000 000 cm). Portanto, o (2 x 29 +1)º = 59º quadrado já cobre o Brasil.

Podemos *resolver o problema de modo mais formal,* usando que os lados de todos os quadrados:

$$1,\ \sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2},\ \text{etc.}$$

formam uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$ logo, queremos determinar o menor inteiro n tal que $n - 1 > x$, sendo x tal que

$$\left(\sqrt{2}\right)^x = 450\,000\,000$$

ou, $x = \log_{\sqrt{2}} 450\,000\,000 \cong \dfrac{2(\log 4{,}5 + 8)}{\log 2} \cong 57{,}5$ e $n = 59$.

Portanto, o 58º quadrado não "cobre" o Brasil, mas o 59º, sim.

Este mesmo problema pode ser resolvido com hexágonos e pentágonos. Que tal tentar?

Vejamos agora o que diz nossa intuição na lenda:

O jogo de xadrez

Segundo uma lenda antiga, o jogo de xadrez foi inventado na Índia, para agradar a um soberano, como passatempo que o ajudasse a esquecer os aborrecimentos que tivera com uma desastrada batalha. Encantado com o invento, o soberano, rei Shirham, quis recompensar seu súdito Sissa Ben Dahir, o inventor do xadrez. Shirham disse a Sissa que lhe fizesse um pedido, que ele, rei Shirham, o atenderia prontamente. Sissa disse, simplesmente:

– Bondoso rei, dê-me então um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda casa, quatro $(= 2^2)$ pela terceira, oito $(= 2^3)$ pela quarta, e assim por diante, até 2^{63} grãos de trigo pela última casa do tabuleiro, isto é, a 64ª casa.

O rei achou esse pedido demasiado modesto e, sem dissimular seu desgosto, disse a Sissa:

– Meu amigo, tu me pedes tão pouco, apenas um punhado de grãos de trigo. Eu desejava cumular-te de muitas riquezas: palácios, servos e tesouros de ouro e prata.

Como Sissa insistisse em seu pedido original, o rei ordenou a seus auxiliares e criados que tratassem de satisfazê-lo. O administrador do palácio real mandou que um dos servos buscasse um balde de trigo e fizesse logo a contagem. Um balde com cerca de 5 kg de trigo contém aproximadamente

115 000 grãos (como o leitor pode verificar, fazendo, ele mesmo, a contagem...); foi o suficiente para chegar à 16ª casa do tabuleiro, mas não além, pois

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{15} = 2^{16} - 1 = 65\,535^{*},$$

enquanto, para chegar à 17ª casa, seriam necessários

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{16} = 2^{17} - 1 = 131\,071$$

grãos de trigo. (Um fato interessante a observar: o número de grãos de trigo a colocar numa casa é igual a todos os grãos já colocados nas casas precedentes mais 1. De fato, pelo penúltimo cálculo vê-se que todos os grãos colocados até a 16ª casa mais 1 é 2^{16}, que é o número de grãos correspondentes à 17ª casa.)

– Traga logo um saco inteiro (60 kg, aproximadamente 1 380 000 grãos) – ordenou o administrador a um dos servos –, depois você leva de volta o que sobrar. Ao mesmo tempo providenciou a vinda de mais uma dezena de contadores de trigo para ajudar na tarefa, que se tornava mais e mais trabalhosa.

O administrador, os servos e os contadores já haviam terminado com 10 sacos de trigo (= 10 x 60 x 23 000 = 13 800 000 de grãos) e mal haviam passado da 23ª casa do tabuleiro, visto que

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{22} = 2^{23} - 1 = 8\,388607$$
$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{23} = 2^{24} - 1 = 16\,777215.$$

A essa altura o rei foi notificado do que estava acontecendo e alertado de que as reservas do celeiro real estavam sob séria ameaça. Insistindo, porém, em atender ao pedido de seu súdito, ordenou que o trabalho continuasse.

---

* Estamos usando o seguinte resultado: dado um número $q \neq 1$ e n um inteiro positivo arbitrário, seja $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$, logo $qS = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1}$. Subtraindo a primeira igualdade da segunda, obtemos

$qS - S = q^{n+1} - 1$, ou $S = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, que é a fórmula da soma usada, neste texto, para $q = 2$ (fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica).

Mandou convocar mais servos e mais contadores; ao mesmo tempo, mandou chamar os melhores calculistas do reino para uma avaliação do problema. Esses vieram e, cientificados do que se passava, debruçaram-se nos cálculos. Em menos de uma hora de trabalho, puderam esclarecer o rei de que não havia trigo suficiente em seu reino para atender ao pedido de Sissa. Mais do que isso, em todo o mundo conhecido na época não havia trigo suficiente para atender àquele pedido!

No tempo em que isso aconteceu, pensava-se que o mundo fora criado havia menos de 5 000 anos. Assim, os calculistas do rei puderam dizer-lhe que nem mesmo toda a produção mundial de trigo, desde a criação do mundo, seria suficiente para atender ao pedido de Sissa.

Vamos ver por quê.

O número de grãos pedidos por Sissa:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615,$$

valor obtido usando uma calculadora científica.

Como verificamos no início, um balde de 5 kg de trigo contém 115 000 grãos, logo 1 tonelada de trigo (200 baldes) contém 23×10^6 grãos. A produção mundial de trigo é da ordem de 590 milhões de toneladas (*Internet*), ou seja, $23 \times 590 \times 10^{12}$ grãos. Ora, $2^{64} - 1$ dividido por esse número de grãos resulta aproximadamente 1360, isto é, seriam necessários 1360 anos de produção mundial de trigo no nível de hoje para atender ao pedido de Sissa.

Incrível, não é?!

Baseado nos artigos

Logaritmos – um curso alternativo
Renato Fraenkel, **RPM** 4

Quando a intuição falha
Joel Faria de Abreu, **RPM** 8

De São Paulo ao Rio de Janeiro com uma corda "ideal"
Geraldo G. Duarte Jr., **RPM** 22

Números muito grandes
Geraldo Ávila, **RPM** 25

Eleições – preferência é transitiva?

Antes de qualquer eleição nacional importante, sempre são feitas pesquisas, que a população acompanha com interesse, em inúmeros setores da sociedade: empresas, clubes, escolas, etc. Vou falar aqui de uma pesquisa feita em uma escola, antes do primeiro turno de uma eleição para presidente da República.

A história começou quando ouvi um colega, professor de História, conversando com os alunos de uma turma da 3ª série do ensino médio. Todos eleitores, naturalmente. Perguntava esse meu colega em quem eles votariam no segundo turno, considerando as hipóteses, que ele iria apresentar, em relação aos três cadidatos principais, que chamarei aqui de A, B e C. Esse meu colega perguntou então para a turma em quem eles votariam se A e B fossem para o segundo turno. E a maioria da turma votaria em A. Em seguida ele perguntou em quem votariam se B e C fossem para o segundo turno. E agora a maioria da turma votaria em B. Dando-se por satisfeito, o professor resolveu começar a aula, mas foi interpelado por um aluno, que lhe perguntou se ele não iria propor a hipótese de A e C irem para o segundo turno. Esse colega respondeu que não havia necessidade dessa pergunta porque naturalmente A ganharia "de barbada".

A aula começou e eu me retirei para pensar no caso que agora relato. Na realidade, por incrível que pareça, o professor estava errado. Ele não poderia concluir que a maioria da turma preferiria A a C. Para mostrar que esse raciocínio é falso, imaginemos que num grupo de pessoas a disputa entre A, B e C seja equilibrada da seguinte forma: $1/3$ das pessoas desse grupo tem preferência por A, B e C nessa ordem; $1/3$ das pessoas tem preferência por B, C e A nessa ordem, e o restante por C, A e B nessa ordem.

	1º	2º	3º
1/3	*A*	*B*	*C*
1/3	*B*	*C*	*A*
1/3	*C*	*A*	*B*

Se esse grupo for submetido às perguntas feitas pelo meu caro colega, veremos que, na decisão entre A e B, $2/3$ preferirão A; tendo que optar entre B e C, $2/3$ preferirão B; mas, surpreendentemente, se a decisão for entre A e C, $2/3$ preferirão C! O aluno estava, portanto, certo e a terceira pergunta deveria ter sido feita.

Temos aqui um exemplo de uma relação que intuitivamente esperamos ser transitiva, mas que, na realidade, não é. Divagando um pouco, essa não-transitividade da relação "preferir" pode ter espantado algum dia um cozinheiro de restaurante que só sabia fazer três pratos: um peixe, uma galinha e uma carne, mas, como nunca tinha tempo de fazer os três, sempre oferecia dois deles. É perfeitamente possível que, quando havia peixe e galinha, a maioria dos fregueses preferisse peixe. No dia em que havia galinha e carne, a maioria preferisse galinha e que no dia em que havia peixe e carne a maioria preferisse carne! Isso pode ocorrer mesmo que os fregueses sejam sempre os mesmos. É natural.

Para dar um outro exemplo (as mulheres agora me perdoem), diria que o espanto do cozinheiro pode ser comparado ao da moça que recebeu pedido de casamento de três pessoas A, B e C. Essa moça, que desejava fazer o melhor casamento possível (na opinião dela, naturalmente), dava importância igualmente a três coisas que os candidatos deveriam ter: cultura, beleza e situação financeira.

Para melhor avaliar os pretendentes, ela resolveu dar notas a esses quesitos para cada um deles. Nota 3 significando "bom"; nota 2 significando "médio" e nota 1 para "ruim". Os resultados estão no quadro:

	cultura	beleza	finanças
A	3	2	1
B	2	1	3
C	1	3	2

Veja então que, apesar de haver um empate técnico, se os candidatos fossem comparados aos pares, ela iria preferir A a B porque A vence em dois dos três quesitos; iria preferir B a C pela mesma razão e ainda iria preferir C a A. Incrível, não?

Baseado no artigo *Eleições*
Eduardo Wagner, **RPM** 16

A divisibilidade e o dígito verificador

Introdução

Recentemente fui obrigado a solicitar uma segunda via do meu documento de identidade e, para minha surpresa, acrescentaram um dígito ao final do meu antigo número de registro geral (RG). Na ocasião, fiquei curioso: quais as razões desse dígito adicional? Esclarecimento que só recentemente obtive e que compartilho com o leitor neste artigo.

Sistemas de informação e a segurança na transmissão de dados

Por mais cuidadoso que seja o digitador, erros podem ocorrer e suas conseqüências podem ser muito sérias. É preciso, então, criar mecanismos para detectar o maior número possível de tais erros.

Pesquisas recentes sobre a natureza dos erros de digitação revelam um fato curioso. Cerca de 79% dos erros ocorrem com a digitação equivocada de um único dígito (ou algarismo), como, por exemplo, digitar 1 573, quando o correto seria 1 673.

Esse tipo de erro recebe o nome de erro singular.

Outros 11% dos erros, chamados de erros de transposição, referem-se à troca de dois dígitos (ou algarismos), como, por exemplo, escrever MTAEMÁTICA, quando o correto seria MATEMÁTICA. Esses são chamados de erros de transposição. Os demais

10% dos erros estão distribuídos em diversas categorias, nenhuma delas representando mais de 1% do total.

É bom que fique claro que existem particularidades em cada sistema de códigos, ou até mesmo em cada idioma, que podem mudar significativamente essa distribuição de probabilidades. Apenas para citar um exemplo, na Suécia os números de identificação de cada cidadão são constituídos por 6 algarismos para a data de nascimento (ano/mês/dia), seguidos de 3 algarismos para dar conta de duplicações de datas coincidentes. Muitas pessoas, no entanto, ao digitar, permutam os algarismos do ano com os do dia, criando um erro muito freqüente, que não é singular nem de transposição (trata-se aqui de um erro de trocas duplas).

Sabendo-se que nos dias de hoje cada vez mais usamos os computadores para armazenar e processar as informações digitadas, seria possível criar um sistema que pudesse identificar com 100% de segurança um erro de digitação do tipo singular ou de transposição? Um tal sistema daria conta de evitar cerca de 90% dos erros mais freqüentes de digitação.

A divisibilidade e uma solução do problema

O sistema ISBN (International Standard Book Number), criado em 1969 para a identificação numérica de livros, CD-Roms e publicações em braille, talvez seja um dos pioneiros na utilização de um dígito de verificação ao final de cada código, capaz de resolver o problema dos erros singulares e de transposição. Por exemplo, o código ISBN 97-26-62792-3 refere-se ao livro *O mistério do bilhete de identidade e outras histórias* (Editora Gradiva, Lisboa, 2001). Com exceção do último dígito da direita, que é o dígito verificador (DV) (ou dígito de controle, como é conhecido em Portugal), os demais 9 dígitos são responsáveis por identificar o país de origem da obra, a editora e o livro propriamente dito.

Os equipamentos que recebem a digitação de um código ISBN, $x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6\, x_7\, x_8\, x_9$ e seu dígito de verificação x_{10}, estão programados para verificar se o resultado, S, da expressão

$$10 \times x_1 + 9 \times x_2 + 8 \times x_3 + \ldots + 2 \times x_9 + 1 \times x_{10}$$

é divisível por 11 ou não: o algarismo de verificação x_{10} é escolhido de tal forma que o resultado dessa conta tenha sempre resto zero na divisão por 11. Veja, no exemplo do livro acima, que

$10 \times 9 + 9 \times 7 + 8 \times 2 + 7 \times 6 + 6 \times 6 + 5 \times 2 + 4 \times 7 + 3 \times 9 + 2 \times 2 + 1 \times 3$ é igual a 319, que é divisível por 11.

Podemos demonstrar um importante resultado com relação a esse sistema:

Resultado

Se ocorrer na leitura de um código ISBN um, e apenas um, dos dois erros (singular ou de transposição), então a soma S não será um múltiplo de 11.

Demonstração

Caso 1: Quando ocorre um erro singular.

Seja $x_1 \ldots x_i \ldots x_j \ldots x_{10}$ um código ISBN com dígito de verificação x_{10} e $x_1 \ldots x_i^* \ldots x_{10}$ o resultado da ocorrência de um erro singular na i-ésima posição. Chamemos de S e S^* as somas correta e errada, respectivamente. Temos, evidentemente, que S é divisível por 11 e

$$S^* - S = (11 - i)(x_i^* - x_i) \neq 0.$$

Se admitirmos por hipótese que S^* seja múltiplo de 11, então, como 11 é primo, concluímos que 11 divide $11 - i$ ou divide $x_i^* - x_i$, o que é um absurdo, pois $11 - i$ e $x_i^* - x_i$ são números inteiros não nulos entre -10 e 10. Logo, S^* não é múltiplo de 11, o que acusa o erro cometido.

Caso 2: Quando ocorre um erro de transposição.

Seja $x_1 \ldots x_i \ldots x_j \ldots x_{10}$ um código ISBN, x_{10} o dígito de verificação e $x_1 \ldots x_i \ldots x_j \ldots x_{10}$ o resultado da ocorrência de uma transposição dos algarismos x_i e x_j nas posições i e j $(i \neq j)$. Nesse caso, a diferença $S^* - S$ é igual a

$$(11 - i)x_j + (11 - j)x_i - (11 - i)x_i - (11 - j)x_j = (j - i)(x_j - x_i) \neq 0.$$

A hipótese de S^* ser múltiplo de 11 mais uma vez é absurda porque nos conduziria à conclusão de que um dos números $j - i$ ou $x_j - x_i$, que são números inteiros não nulos entre -10 e 10, é múltiplo de 11. Segue que S^* não pode ser múltiplo de 11.

Se agora admitirmos que na digitação de um código ISBN só ocorrem erros singulares ou de transposição, não mais do que um erro em cada número, então não ocorrem erros na digitação de um código ISBN se e somente se a soma S for um múltiplo de 11. É bom lembrar que, ao digitarmos um código ISBN cometendo um erro singular ou de transposição, o equipamento que recebe os dados será capaz apenas de acusar a existência de um erro devido ao fato de S não ser divisível por 11, mas não será capaz de encontrá-lo; o que implica dizer que o digitador tem ainda como tarefa procurar o erro cometido.

O dígito de verificação do RG

Para o Estado de São Paulo e muitos outros Estados brasileiros, o dígito de verificação do RG é calculado da seguinte maneira:

Seja $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9$ o RG de um indivíduo. O dígito de verificação, x^{10}, é calculado de modo que a soma

$$100\times x_{10} + 9\times x_9 + 8\times x_8 + 7\times x_7 + ... + 2\times x_2 + 1\times x_1$$

seja divisível por 11. Como normalmente se reserva apenas um algarismo para o dígito de verificação, que, neste caso, é um inteiro entre 0 e 10 (os restos possíveis na divisão de um inteiro por 11), normalmente se usa a letra X para representar o dígito de verificação 10. Por exemplo, no RG número 25 135 622 – X, verifique que

$$100\times 10 + 9\times 2 + 8\times 2 + 7\times 6 + 6\times 5 + 5\times 3 + 4\times 1 + 3\times 5 + 2\times 2 + 1\times 0$$

é divisível por 11.

Observa-se que os raciocínios utilizados na demonstração do Resultado anterior, aplicam-se quase totalmente à nova expressão aqui utilizada. Com efeito, na ocorrência de um erro singular no dígito x_i na digitação de um tal RG, tem-se $S^* - S = i\,(x_i^* - x_i)$ para $i = 1, 2, ..., 9$ e se $i = 10$, $S^* - S = 100\,(x_{10}^* - x_{10})$, que não podem ser múltiplos de 11 para $x_i^* - x_i \neq 0$, $i = 1, 2, ..., 10$. Na ocorrência de um erro de transposição entre x_i e x_j, com $1 \leq i < j \leq 9$, tem-se $S^* - S = (j - i)(x_i - x_j)$, que não é divisível por 11, se $x_i - x_j \neq 0$. No caso, entretanto, em que a transposição se dê entre x_i e x_{10}, $S^* - S = (100 - i)\,(x_i - x_{10})$, que é um múltiplo de 11 se $i = 1$, mesmo que $x_1 - x_{10}$ não seja nulo. Isso não tem efeito prático negativo, pois erros de transposição de alta probabilidade são aqueles entre dígitos consecutivos. A troca, portanto, entre o primeiro e último dígitos não é nada comum.

Já em Portugal, onde o algoritmo de verificação dos documentos de identificação é igual ao nosso, com a diferença de que lá se utiliza peso 10 no dígito de verificação em vez de peso 100, esse problema não se dá. Os responsáveis pela execução do sistema decidiram, porém, não utilizar a letra X para o dígito de verificação 10, optando pelo uso do zero para representá-lo. É curioso notar, no caso português, onde um dígito de verificação 0 pode significar o número zero ou o número dez, que a concepção do sistema de detecção de erros singulares e de transposição está comprometida para os portadores de documentos de identificação com dígito de verificação igual a 0 ou 10.

Ficaria a questão: para que o dígito verificador utilize uma só posição, por que não usar a divisibilidade por 10 (cujos restos possíveis são só 0, 1, ... , 9), em vez de 11? O argumento na prova da proposição mostra que foi essencial que 11 fosse primo e maior que 10.

É bom notar ainda que o sistema brasileiro também não é uniforme. Recentemente descobri que o dígito de verificação do RG, emitido no Rio Grande do Sul, de um amigo gaúcho, não segue o mesmo algoritmo válido para São Paulo e muitos outros Estados.

Baseado no artigo
Aritmética modular e sistemas de identificação
José Luiz Pastore Mello, **RPM** 48

O tamanho da Terra

O raio da Terra é aproximadamente 6 400 km..., mas como é que se mede o raio da Terra?

Um grande sábio da Antiguidade, Eratóstenes, calculou o raio da Terra há mais de 2 200 anos! Mais do que isso, os sábios daquela época calcularam também as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol, e os tamanhos desses astros; e para isso utilizaram noções básicas de semelhança e proporcionalidade.

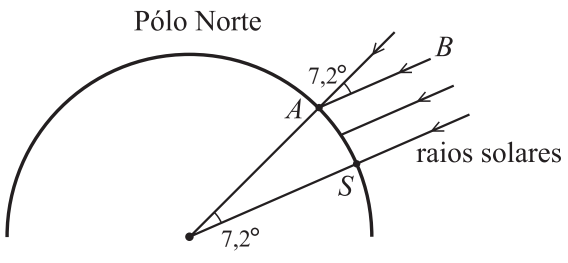
Eratóstenes viveu no terceiro século a.C., na cidade de Alexandria, que fica no extremo oeste do delta do rio Nilo. Mais ao sul, onde hoje se localiza a grande represa de Assuã, ficava a cidade de Siena, como ilustra o mapa. Naquela época deveria haver um tráfego regular de caravanas entre as duas cidades; e, talvez por causa desse tráfego, sabia-se que a distância entre Alexandria e Siena era de aproximadamente 5000 estádios, ou seja, 800 km (tomando o estádio como igual a 160 metros).

Decerto os viajantes experientes já haviam feito uma boa estimativa dessa distância. Quem viaja com freqüência por anos a fio sabe calcular as distâncias percorridas, muito provavelmente pelo número de dias gastos na viagem e pelo que se consegue percorrer numa jornada. E, uma vez conhecida a distância ao longo das estradas, seria possível fazer uma estimativa da distância em linha reta.

Outra coisa que se sabia é que as duas cidades estavam mais ou menos no mesmo meridiano, ou seja, tinham a mesma longitude. Isso é intrigante, pois, enquanto seja relativamente fácil fazer uma estimativa da latitude de um lugar, a comparação das longitudes de dois lugares diferentes é um problema bem mais complicado. Decerto eles achavam que as duas cidades estavam no mesmo meridiano porque para ir de Alexandria a Siena viajava-se diretamente na direção sul.

O que fez Eratóstenes

Além desses dois fatos – a distância de 800 km entre as duas cidades e elas estarem no mesmo meridiano[1] –, dois outros fatos foram cruciais no raciocínio de Eratóstenes: devido à grande distância que o Sol se encontra da Terra, os raios solares que chegam ao nosso planeta são praticamente paralelos; e quando os raios solares caíam verticalmente ao meio-dia em Siena (o que era comprovado vendo que as cisternas ficavam totalmente iluminadas ao meio-dia e o disco solar podia ser visto refletido no fundo dessas cisternas),[2] em Alexandria eles formavam, com a vertical do lugar, um ângulo igual a 1/50 da circunferência completa. Com a medida em graus, isso equivale a dizer que esse ângulo era de 7,2º.



[1] Isso só é verdade aproximadamente, tanto no que se refere à distância entre as duas cidades, quanto à igualdade das longitudes. Veja Alexandria e Assuã num bom mapa do Egito: Assuã, a antiga Siena, fica às margens do lago Nasser, pouco mais de 3º a leste de Alexandria.

Veja:

$$\frac{7,2}{360}=\frac{72}{36\times 100}=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}.$$

Nesse ponto entra o raciocínio de Eratóstenes: se a 1/50 de ângulo correspondem 800 km de arco, ao ângulo de 360º corresponderá 50 x 800 = 40 000 km.

Que Matemática foi usada?

Vamos rever o raciocínio de Eratóstenes para identificar os fatos matemáticos usados. Ele entendeu que o ângulo de $7{,}2^\circ$ em Alexandria (A na figura anterior) é igual ao ângulo central em O, o que pressupõe que os raios solares que chegam à Terra são paralelos, devido à grande distância do Sol[3]. Portanto, a igualdade dos ângulos em O e A é devida ao fato de eles serem ângulos correspondentes em duas paralelas (AB e OS) cortadas pela transversal OA. O outro fato matemático utilizado é o da proporcionalidade entre arcos e ângulos: os ângulos centrais são proporcionais aos arcos que subentendem; assim, o ângulo de $7{,}2^\circ$ está para o arco AS, assim como 360° está para a circunferência completa.

Será que foi isso mesmo?

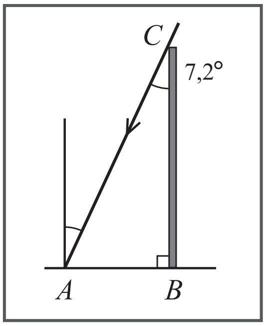
Sim, será que Eratóstenes mediu mesmo o ângulo de incidência dos raios solares? Para isso ele teria de se valer de algum aparelho, e teria de realizar uma operação meio sofisticada, difícil de ser feita com precisão.

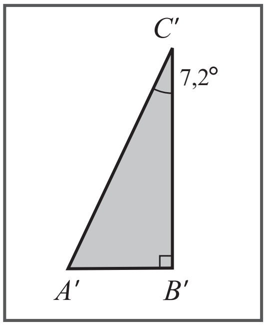
Parece que ele procedeu de maneira muito mais simples. Em Alexandria certamente havia um relógio solar, com uma coluna construída bem na vertical, cujas sombras projetadas serviam para marcar a hora do dia. Ele decerto esperou o dia do ano em que se sabia que os raios solares incidiam verticalmente em Siena ao meio-dia; e, nesse instante, mediu o comprimento da sombra projetada pela coluna do relógio solar em Alexandria.

---

[2] Isso também só é verdade aproximadamente; hoje sabemos que a antiga Siena ficava uns 60 km ao norte do Trópico de Câncer, que é o paralelo de maior afastamento norte do Sol em relação ao equador.

[3] No tempo de Eratóstenes já era sabido que o Sol se encontrava a uma imensa distância da Terra.





De posse do comprimento dessa sombra (AB na figura) e da altura BC da coluna, ele teria desenhado um triângulo retângulo $A'B'C'$ (numa folha de papiro, com certeza), com lados $A'B'$ e $B'C'$ proporcionais aos lados AB e BC, respectivamente, do triângulo ABC, que também é retângulo em B (veja as figuras). Seria agora relativamente fácil medir o ângulo de incidência, ou seja, o ângulo $A'C'B'$ do triângulo $A'B'C'$ da figura. Eratóstenes teria verificado que esse ângulo era de 1/50 da circunferência completa, ou seja, 7,2º.

A igualdade do ângulo de incidência em A com o ângulo ACB decorre de esses ângulos serem alternos internos; e a igualdade dos ângulos ACB e $A'C'B'$ é devida à semelhança dos triângulos ACB e $A'C'B'$.

O raio da Terra

Da circunferência terrestre podemos passar ao raio da Terra sem necessidade de novas medições.

No caso da Terra, como $C = 400\,000$ km e lembrando que $C = 2\pi r$, calcula-se $r = C/2\pi \approx 6370$ km, usando para π a aproximação 3,14.

Eratóstenes, Ptolomeu e Cristóvão Colombo

Já dissemos que Eratóstenes viveu no século terceiro a.C., provavelmente entre 276 e 196 a.C., dizem os historiadores mais abalizados. Portanto, era pouco mais jovem que Arquimedes (287-212 a.C.). Ele não foi o primeiro a se preocupar com a medida do tamanho da Terra. Aristóteles (384-322) e Arquimedes fazem referências a outras estimativas e citam valores do tamanho da Terra. Mas eles não explicam de onde provêm suas informações, por isso mesmo esses eventuais cálculos anteriores a Eratóstenes não são levados em conta.

O cálculo do tamanho da Terra aparece num livro de Ptolomeu sobre Geografia, livro esse que foi muito usado no tempo das grandes navegações. Por razões não bem esclarecidas até hoje, ou Ptolomeu valeu-se de um cálculo do raio terrestre diferente do que fez Eratóstenes, ou registrou um estádio de outro comprimento que o do tempo de Eratóstenes[4].

Seja como for, em sua Geografia, Ptolomeu utiliza um valor do raio da Terra que está abaixo do valor fornecido por Eratóstenes. E apresenta um mapa do mundo então conhecido, o qual contém mais dois erros importantes: a largura leste-oeste do mar Mediterrâneo está exageradamente alta, bem como a largura leste-oeste da Ásia. Em conseqüência desses três erros, a distância do Oeste europeu (Espanha, Portugal) ao Leste asiático (Japão, Coréia), para quem navegasse pelo oceano Atlântico em direção oeste, seria bem mais curta do que realmente é. Cristóvão Colombo valeu-se disso para convencer os reis de Espanha de que sua viagem às Índias seria viável[5]. Sua sorte foi estar errado em pensar que não havia terra em seu caminho, pois, fosse isso verdade, ele teria perecido.

Baseado no artigo *Se eu fosse professor de Matemática*
Geraldo Ávila, **RPM** 54

[4] Cabe notar também que não há acordo sobre o valor exato do estádio em metros.

[5] É interessante notar que razões de ordem técnica – ao menos em parte – levaram Portugal a não aprovar a proposta de Colombo. Com efeito, os especialistas encarregados de julgar essa proposta constataram corretamente que a distância a ser percorrida na viagem seria muito mais longa do que Colombo previa, sendo impossível levar víveres e água em quantidades suficientes para toda a viagem.

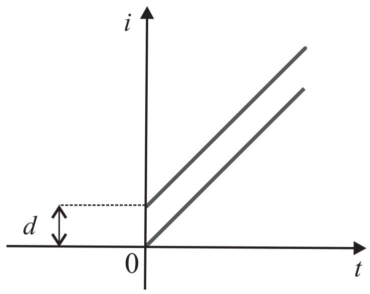
Problema das idades

Tenho o triplo da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens. Quando tu tiveres a idade que eu tenho, teremos juntos 56 anos. Qual é a minha idade?

Esse problema, com enunciado em estilo de uma charada, está hoje meio fora de moda, mas foi célebre numa época em que havia uma preocupação de resolver esse e outros tipos de problemas "por Aritmética" e não "por Álgebra".

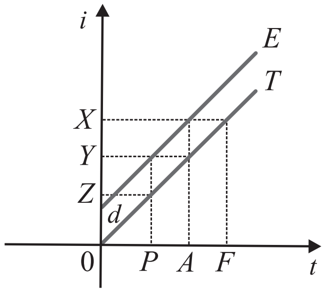
Vamos abordar o problema geometricamente. Se representarmos graficamente, num sistema de coordenadas cartesianas, a evolução da idade de um indivíduo através do tempo, obteremos sempre uma reta paralela à bissetriz do primeiro quadrante.

Na realidade, obteremos a própria bissetriz se tomarmos o "ano zero" como sendo o ano de seu nascimento, pois no ano 1 ele terá 1 ano, e assim sucessivamente (isso é um fato do qual a experiência já mostrou que podemos convencer mesmo uma pessoa que jamais estudou *Geometria Analítica*). Já a idade de uma pessoa d anos mais velha terá como gráfico uma reta paralela, já que a diferença entre as idades dos dois permanecerá constante e igual a d.



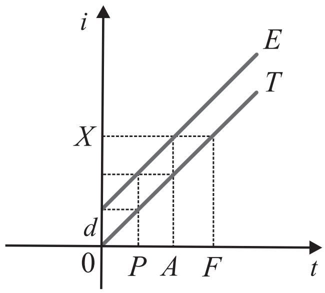
Voltemos então ao nosso problema. Há dois indivíduos em causa, um que fala, chamamo-lo de E, e um que escuta, T. Evidentemente E é mais velho que T (... quando eu tinha a idade que tu tens...), digamos, d anos, de modo que seus gráficos de idades se assemelham aos da figura da página anterior.

Há três épocas mencionadas no problema, que chamaremos P (passada), A (atual) e F (futura). A maneira como se relacionam A e P (... quando eu tinha a idade que tu tens...) e a maneira como se relacionam A e F (... quando tu tiveres a idade que eu tenho...) mostram que elas se situam no gráfico como nos casos da figura ao lado.



A inclinação de 45^o das retas desenhadas acarreta que todos os segmentos verticais compreendidos entre elas têm comprimento d.

O dado de que a idade que E tem na época A (isto é, OX) *é* o triplo da idade que T tinha na época P (isto é, OZ), juntamente com o fato de $XY = YZ = d$, obriga a que OZ seja também d (estou evitando escrever a equação $2d + OZ = 3OZ$, já que isso pode ser "visto" na figura). Mas, então, a reta gráfica da idade de E tem que passar por Z e a figura correta é a que está ao lado.



Agora então é claro que, na época F, a idade de T é $3d$ enquanto a de E é $3d + d$. Logo os dois juntos têm $7d$, que deve ser 56. Logo, d tem que ser 8 e a "idade que eu tenho" é $3 \times 8 = 24$, que é a resposta.

Baseado no artigo
Uma solução geométrica para o "problema das idades"
José Paulo Q. Carneiro, **RPM** 16

A ilha dos sapatos gratuitos

Cena nº 1 – O problema

Um dia, estava eu na faculdade tranqüilamente pensando na vida quando chegou um colega e me fez uma proposta inusitada:

– Você quer comprar de graça (?!) um sapato?

É claro que eu topei de cara comprar de graça (?!) um sapato, embora desconfiasse que houvesse algum rolo. As condições eram:

1. Comprar um selinho desse meu amigo. Preço R$ 3,00;

2. Juntar mais R$ 27,00 e o selinho e levar a uma determinada loja. Eu receberia um par de sapatos com valor de mercado de R$ 30,00 e mais dez selinhos no valor de R$ 3,00;

3. Vender os dez selinhos que eu seria restituído dos R$ 3,00 iniciais de compra do selinho do meu amigo e dos R$ 27,00 que anexei para retirar o sapato da loja.

Dei R$ 3,00 ao meu colega pelo selo, fui à loja, retirei um par de sapatos por R$ 27,00 e ganhei os dez selinhos que me iriam restituir tudo o que investira.

Vendi os dez selinhos com alguma facilidade. Fiz então um balanço: eu tinha até então gasto R$ 30,00, recebido R$ 30,00 e mais um par de sapatos. Um par de sapatos de graça, portanto. Como isso seria possível? Não estaria essa promoção violando a Lei de Lavoisier ou a Segunda Lei da Termodinâmica? Fiquei estarrecido com o problema. Como interpretá-lo?

Cena nº 2 – As explicações convencionais

Aturdido com o problema que aparentemente violava leis naturais nunca dantes questionadas, saí a conversar com meus colegas de faculdade. O primeiro a tentar responder foi Altarimando. Ele se entusiasmou.

– Não se preocupe se essa promoção fere ou não as leis da natureza. O importante é que funciona. Assim como você conseguiu comprar sapatos de graça, vamos expandir o negócio para comprar arroz de graça, roupa de graça, etc. Talvez esse seja o perdido caminho para a humanidade alcançar o Nirvana, o tão desejado Shangrilá. Não se esqueça de que as Leis de Mercado são superiores à Lei de Lavoisier.

Desconfiei que ele estava mais para poeta transcendental que crítico de Matemática e Física e fui procurar o Souzinha, um crítico de tudo. Logo deu seu parecer, claro e taxativo, incisivo e demolidor, característico de todo jovem de menos de quarenta anos:

– Estamos diante da chamada Bola-de-neve, Conto da venda sucessiva ou ainda da Corrente da felicidade. É um estratagema que favorece barbaramente os compradores iniciais e é altamente desvantajoso para os finais. O universo possível de compradores é um número finito e os compradores dos selinhos são: 1 na primeira etapa, 10 na segunda, 100 na terceira, etc. Ou seja, os envolvidos na corrente são em número de

$$10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots$$

Quando o somatório excede o número de possíveis compradores, a corrente pára e os últimos não terão para quem vender os selos, sendo prejudicados.

Logo, essa artimanha é tão simplesmente uma falácia. Continuam válidos, portanto, a Lei de Lavoisier e o Segundo Princípio da Termodinâmica.

Fiquei feliz, confesso, por essa explicação do Souzinha.

As pessoas como nós, que estudam Matemática, com a mente criada e disciplinada por critérios lógico-formais cartesianos têm verdadeiro horror a situações que fujam desse modo e, o que é pior, funcionem. Se isso pudesse ocorrer, ficaríamos inseguros, e toda uma vida ficaria questionada.

Cena nº 3 – A explicação diferente

Quando eu já estava disposto a encerrar o assunto, encontrei um velho amigo, Adão, estudante de Economia na Getúlio Vargas.

Apesar de jovem, Adão é crítico ponderado e profundo em seus conhecimentos.

Só como curiosidade, expus a ele o problema e as duas respostas que eu tinha ouvido até então.

Adão, filosoficamente, começou a raciocinar socraticamente.

– Quanto é mesmo que a loja recebe por par de sapatos vendido?

Ora, Adão, respondi, o enunciado é claro. Ela recebe R$ 30,00 por par de sapatos.

– Acho que aí temos uma pista, não é esse o valor, ponderou Adão. E continuou:

– Admitamos uma ilha com 1 111 pessoas potencialmente clientes dos sapatos e mais uma pessoa, que é o dono da loja, totalizando 1 112 pessoas. O dono da loja propõe o negócio a um primeiro cliente. Compre um selo por R$ 3,00, adicione R$ 27,00 e deflagre o processo. Esse primeiro cliente vende dez selos. Dez compradores vendem depois para 100 outros compradores. Já são 111 compradores. Os cem compradores vendem agora para 1 000 compradores. Esses últimos 1000 compradores, que já gastaram, cada um, R$ 3,00 pelo selo, não têm mais para quem vender. Uma de suas opções é perder esse selo. Outra (mais razoável) é acrescentar R$ 27,00 e ir buscar o seu par de sapatos, que, como sabemos, vale no mercado R$ 30,00. Logo, esses últimos compradores não serão prejudicados financeiramente (só não terão os seus sonhos de sapatos grátis).

Agora façamos um raciocínio. Quanto recebeu a loja de sapatos e quantos pares de sapatos foram entregues? Curiosamente você verá que a loja não recebe R$ 30,00 por par de sapatos vendido.

A loja recebeu em dinheiro:

do 1º comprador:	3,00 + 27,00	=	30,00
de 10 compradores:	10 x 27,00	=	270,00
de 100 compradores:	100 x 27,00	=	2 700,00
de 1000 compradores:	1000 x 27,00	=	27 000,00
Total	R$ 30 000,00		

Total de pares de sapatos vendidos = 1111

Receita média da loja por par de sapatos: R$ 30 000,00/1111 ≈ R$ 27,03

Conclusão

A loja vende cada par de sapatos a R$ 30,00 e recebe na prática R$ 27,00 e não R$ 30,00, como supostamente se poderia pensar. Vê-se, portanto, que cada pessoa para ganhar um par de sapatos precisa entregar o sinal (entrada) e ter o trabalho de vender dez outros sapatos. O caso em estudo é um processo que traz embutido um trabalho de venda como custo. Custo esse que é pago pela loja (30,00 – 27,03) = 2,97 por par de sapatos. É uma comissão de venda. Tudo claro, Botelho?

Fiquei a pensar. Como as coisas ainda estavam algo confusas dentro de mim, pedi apoio à Revista do Professor de Matemática.

A resposta da **RPM**

1. Se a história se passasse no instante em que nosso amigo Botelho acabou de vender seus dez selinhos, o que estaria acontecendo é que dez pessoas (os compradores dos selinhos) teriam se cotizado para comprar um par de sapatos para ele.

2. Na história, nada obriga que cada comprador se limite a adquirir um par de sapatos apenas. Para citar um caso extremo, podemos supor que o primeiro comprador, em vez de vender os 10 selinhos que recebeu da loja, fica com eles e com isso compra mais dez pares de sapatos a R$ 27,00 cada, recebe 100 selinhos, etc., até acabar com o estoque da loja. Depois, revende todos os sapatos ao preço oficial de R$ 30,00. Em vez de um par de sapatos de graça, ganha muito mais.

3. Do ponto de vista da loja, o que ela fez corresponde simplesmente a vender cada par de sapatos a R$ 27,00, exceto o primeiro, vendido por R$ 30,00. Os selinhos são apenas um truque de marketing. A loja vende por R$ 27,00, mas, como o preço usual é R$ 30,00, a diferença é dividida entre alguns felizardos, ou espertos. O exemplo do economista Adão, em que cada habitante da ilha compra apenas um par de sapatos, é o extremo oposto do caso 2 acima. Na prática ocorrem, em geral, situações intermediárias em que algumas pessoas formam estoque para revenda (podendo em seguida organizar cartéis para manipular os preços, mas isso já seria outra história).

Baseado no artigo *Na ilha dos sapatos gratuitos*
Manoel Henrique C. Botelho, **RPM** 7

Frações egípcias

Quando se menciona *Fibonacci*, ou seja, *Leonardo Fibonacci* (1170, 1240?), também conhecido como Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa, pensa-se logo no célebre problema dos coelhos, apresentado e resolvido no seu *Liber Abaci*, conduzindo à célebre seqüência 1, 1, 2, 3, 5, 13, ..., que até hoje leva seu nome. Mas o livro contém muito mais: entre os problemas nele tratados, a maioria sem grande interesse para nós, leitores de hoje, pois tratam de Aritmética usando os algarismos indo-arábicos ou de Matemática Comercial, encontramos verdadeiras jóias matemáticas, como um relacionado com a maneira egípcia de lidar com frações.

Como sabemos, os egípcios só trabalhavam com frações unitárias, isto é, da forma $1/n$, sendo n um número natural [à exceção de 2/3 e, às vezes, das frações da forma $n/(n + 1)$]. Obviamente, em seus problemas matemáticos apareciam frações da forma m/n, que deviam então ser escritas usando-se somente frações unitárias distintas. Ou seja, era necessário escrever $\frac{m}{n}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}$, com n_1, n_2, ..., n_k naturais distintos.

Não discutiremos aqui as interpretações apresentadas pelos eruditos para essa insistência egípcia em trabalhar com frações unitárias. Esse hábito, embora pesado e inconveniente, sobreviveu até a Idade Média. Em verdade, os egípcios, por meio de tabelas apropriadas e métodos engenhosos, conseguiam lidar muito bem com as frações unitárias. O leitor mais curioso poderá consultar o livro *Mathematics in the Time of the Pharaohs* de autoria de R. J. Gillings, Dover, 1982, ou, para uma leitura leve, a **RPM** 15, p. 21.

Não é óbvio que qualquer número racional m/n, com $m < n$, possa ser escrito como soma de frações unitárias. Uma prova da acuidade matemática de Fibonacci é ter percebido a necessidade de mostrar isso. Ele não apresenta uma demonstração formal, como o faríamos hoje, mas dá um método inteiramente geral que resolve o problema.

> *A regra ... é que você divide o número maior pelo menor; e quando a divisão não é exata, verifique entre que dois naturais a divisão está. Tome a maior parte, subtraia-a, e conserve o resto ...*

Em linguagem de hoje, a regra seria:

> *Subtraia da fração dada a maior fração unitária que não é maior do que ela. Repita o processo até obter 0.*

Por exemplo, escrevamos a fração 4/13 como soma de frações unitárias distintas:

$$3 < 13/4 < 4 \Rightarrow 1/3 > 4/13 > 1/4$$

Portanto, $4/13 - 1/4 = 3/52$.

Mas, então, $17 < 52/3 < 18 \Rightarrow 1/17 > 3/52 > 1/18$.

Logo, $3/52 - 1/18 = 2/936 = 1/468$. Aqui, a divisão de 936 por 2 é exata, e o processo termina.

Assim, $4/13 = 1/4 + 1/18 + 1/468$.

Não é difícil demonstrar que o processo descrito por Fibonacci sempre funciona. Para mostrar que o método funciona, demonstraremos que os numeradores das diferenças sucessivas (mesmo antes de simplificar) decrescem estritamente (no exemplo acima, as diferenças são 3/52 e 2/936). Então, como toda sucessão estritamente decrescente de números naturais não negativos é finita (veja *O princípio da descida infinita de Fermat*, **RPM** 32), o processo obrigatoriamente tem fim.

Com efeito, consideremos a fração $\dfrac{a}{b}$ com $a < b$.

Suponha que $b = qa + r$, $0 \leq r < a$. Se $r = 0$, então, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{q}$ e a demonstração está terminada. Podemos, portanto, supor que $r \neq 0$.

Então, $\dfrac{b}{a} = q + \dfrac{r}{a}$ implicando $q < \dfrac{b}{a} < q + 1$, ou $\dfrac{1}{q} > \dfrac{a}{b} > \dfrac{1}{q+1}$.

Assim, $\dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{-r+a}{b(q+1)}$.

Mas, como $a - r < a$, os numeradores das diferenças sucessivas são estritamente decrescentes quando $r \neq 0$, o que queríamos demonstrar.

Baseado no artigo
Um problema de Fibonacci
João Pitombeira de Carvalho, **RPM** 17

As dízimas periódicas e a calculadora

Em uma prova de concurso, destinado principalmente a professores de Matemática, figurava a seguinte questão:

Os números racionais a e b são representados, no sistema decimal, pelas dízimas periódicas

$$a = 3,0181818... = 3,0\overline{18} \quad \text{e} \quad b = 1,148148... = 1,\overline{148}$$

Encontre, justificando, uma representação decimal de $a - b$.

Como a e b são racionais, também o é $a - b$; e, portanto, sua representação decimal é periódica. Na prova, era permitido o uso de calculadora. Mas por meio da calculadora jamais se descobrirá o período, pelo menos com a certeza exigida pelo "justifique". Além disso, a calculadora não conseguirá nem mesmo dar uma idéia do período, se ele for muito longo. De fato, o período pode ter um comprimento maior do que o número de dígitos que a calculadora exibe no visor.

Um primeiro expediente que poderia ocorrer seria fazer a subtração por meio do esquema usado habitualmente para decimais finitos. Isso funcionaria bem em casos mais simples. Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 0,444... \\ -0,333... \\ \hline 0,111... \end{array}$$

o que estaria correto, pois $\dfrac{4}{9} - \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{9}$.

Mas, no caso em questão, o desencontro entre os períodos das duas dízimas apresentadas dificulta o emprego dessa estratégia (a qual, aliás, precisaria ser discutida em termos conceituais). Vejamos:

Como a subtração usual é feita da direita para a esquerda, não se sabe bem por onde começar, antes de descobrir o período.

Por conseguinte, o caminho natural é calcular as geratrizes de a e b, subtrair as frações correspondentes, e então encontrar uma representação decimal para essa fração.

Utilizando esse procedimento, encontra-se:

$$a-b=3+\frac{18}{990}-\left(1+\frac{148}{999}\right)=1+\frac{1292}{1485}=\frac{2777}{1485}\ .$$

Neste ponto, o método mais usado por todo mundo é dividir 2777 por 1485 (ou 1292 por 1485, ganhando uma etapa) pelo algoritmo tradicional, e aguardar o primeiro resto que repete. Deste modo, obtém-se:

$$\begin{array}{cccccccccccc|l}
1 & 2 & 9 & 2 & 0 & & & & & & & & 1485 \\ \cline{13-13}
 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & & & & & & & 0{,}8700336 \\
 & & & & & 5 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & 5 & 4 & 5 & 0 & & & \\
 & & & & & & & 9 & 9 & 5 & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & 4 & 0 &
\end{array}$$

Como se repetiu o resto 1040, a partir daí, os algarismos 7, 0, 0, 3, 3, 6 irão se repetir. Logo, $a-b=1{,}8\overline{700336}$.

Vamos agora fazer alguns comentários:

1. Algumas pessoas envolvidas no processo de aprendizagem da Matemática (alunos, professores, pais, etc.) expressam às vezes a crença de que, com o advento da calculadora, nunca mais haverá ocasião de usar o algoritmo tradicional da divisão. Alguns até usam isso como um argumento para proibir o uso da calculadora em certas fases iniciais da aprendizagem: “é necessário primeiro que o aluno aprenda o algoritmo tradicional, e só depois lhe será permitido usar a calculadora; senão, ele não terá motivação para aprender tal algoritmo”.

Na realidade, o exemplo aqui tratado mostra que nós, professores, temos que exercer nossa criatividade para criar problemas desafiadores, que coloquem em xeque até mesmo a calculadora, deixando claras as suas limitações, em vez de proibir o uso da calculadora, que é uma atitude antipática, repressora, e totalmente contrária ao que um aluno espera de um professor de Matemática. De fato, para um leigo ou iniciante em Matemática, nada mais "matemático" do que uma calculadora, e ele espera que um professor vá iniciá-lo ou ajudá-lo com essa ferramenta, e não proibi-lo de usá-la.

Note-se também que, mesmo usando o algoritmo tradicional da divisão, como fizemos, a calculadora permanece útil para efetuar as multiplicações e subtrações envolvidas no processo, minorando as possibilidades de erro e poupando trabalhos repetitivos e inúteis.

2. O trabalho de divisão ficaria simplificado, se tivéssemos observado que o divisor 1485 tem o fator comum 5 com a base do sistema decimal (um detalhe nem sempre lembrado). Desse modo:

$$\frac{1292}{1485}=\frac{1292}{5\times 297}=\frac{1}{10}\times\frac{2584}{297}=\frac{1}{10}\times\left(8+\frac{208}{297}\right)=$$

$$0,8+\frac{1}{10}\times\frac{208}{297}=0,8+0,0\overline{70336}=0,8\overline{700336},\text{ pois}$$

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
2 & 0 & 8 & 0 & & & & & & 297 \\ \cline{10-10}
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0,70336 \\
 & & & & 1 & 0 & 9 & 0 & & \\
 & & & & & 1 & 9 & 9 & 0 & \\
 & & & & & & 2 & 0 & 8 &
\end{array}$$

Os números envolvidos no algoritmo da divisão ficam menores.

3. Existiria um outro método para encontrar uma representação decimal de $\frac{208}{297}$ (ou de $\frac{1292}{1485}$, mas já vimos que basta o primeiro), que não fosse o algoritmo tradicional da divisão? A resposta é sim.

Basta tomar as sucessivas potências de 10, a saber: 10, 100, etc., até que encontremos uma que deixe resto 1, quando dividida por 297.

Não é difícil fazer isso, experimentando com a calculadora:

$10^3 = 3 \times 297 + 109$; $10^4 = 33 \times 297 + 199$; $10^5 = 336 \times 297 + 208$;
$10^6 = 3367 \times 297 + 1$.

A partir daí, obtém-se: $\dfrac{1}{297} = 3367 \times \dfrac{1}{10^6 - 1}$, e portanto:

$$\frac{208}{297} = 208 \times 3367 \times \frac{1}{10^6 - 1} = 700336 \times \frac{1/10^6}{1 - 1/10^6} =$$

$$\frac{700336}{10^6}\left(1 + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \dots\right) = 0,700336700336700336\dots = 0,\overline{700336},$$

onde a última passagem vem da propriedade das progressões geométricas infinitas: $1 + q + q^2 + \dots = \dfrac{1}{1-q}$, quando $-1 < q < 1$.

Observe que o período da dízima tem comprimento 6, que é justamente o expoente da menor potência de 10 que deixa resto 1, quando dividida por 297.

4. Pode-se ter certeza de que, ao testar as potências de 10, vamos acabar encontrando sempre uma que deixe resto 1, quando dividida por 297 ? A resposta é positiva, sempre que o denominador (no caso, o 297) for primo com 10 (é por isso que devemos antes deixar de fora os fatores 2 e 5), e pode ser encontrada nos livros de *Teoria dos Números*.

Baseado no artigo
As dízimas periódicas e a calculadora
José Paulo Q. Carneiro, **RPM** 52

Mania de Pitágoras

Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos), era realmente um apaixonado pelo Teorema de Pitágoras. Durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e as organizou num livro, ao qual chamou *The Pythagorean Proposition* (A Proposição de Pitágoras). A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações. Na segunda edição, publicada em 1940, esse número foi aumentado para 370 demonstrações. Depois do falecimento do autor, o livro foi reimpresso, em 1968 e 1972, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* daquele país.

O Professor Loomis classifica as demonstrações do teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas "algébricas" (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas "geométricas" (baseadas em comparações de áreas). Ele se dá ao trabalho de observar que não é possível provar o teorema de Pitágoras com argumentos trigonométricos porque a igualdade fundamental da Trigonometria, $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$, já é um caso particular daquele teorema.

Como sabemos, o enunciado do teorema de Pitágoras é o seguinte: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos". Se a, b são as medidas dos catetos e c é a medida da hipotenusa, o enunciado equivale a afirmar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Documentos históricos mostram que os egípcios e os babilônios muito antes dos gregos conheciam casos particulares desse teorema, expressos em relações como

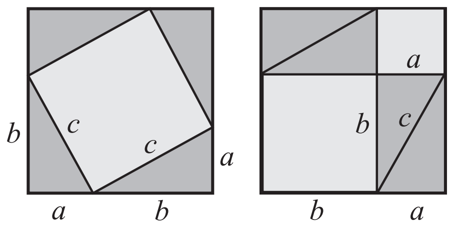
$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ e } 1^2 + (\frac{3}{4})^2 = (1\frac{1}{4})^2.$$

O fato de que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo era (e ainda é) útil aos agrimensores. Há também um manuscrito chinês, datado de mais de mil anos antes de Cristo, onde se encontra a seguinte afirmação: "Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa". Outros documentos antigos mostram que na Índia, bem antes da era Cristã, sabia-se que os triângulos de lados 3, 4, 5, ou 5, 12, 13, ou 12, 35, 37 são retângulos.

O que parece certo, todavia, é que nenhum desses povos sabia demonstrar o teorema. Tudo indica que Pitágoras foi o primeiro a prová-lo. (Ou alguém da sua Escola o fez, o que dá no mesmo, pois o conhecimento científico naquele grupo era propriedade comum.)

A mais bela prova

Qual foi a demonstração dada por Pitágoras? Não se sabe ao certo, pois ele não deixou trabalhos escritos. A maioria dos historiadores acredita que foi uma demonstração do tipo "geométrico", isto é, baseada na comparação de áreas. Não foi a que se encontra nos "Elementos" de Euclides, e que é ainda hoje muito encontrada nos livros de Geometria, pois tal demonstração parece ter sido concebida pelo próprio Euclides. A demonstração de Pitágoras pode muito bem ter sido a que decorre das figuras abaixo:



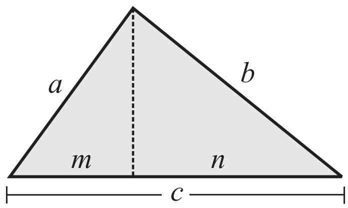
Do quadrado que tem $a + b$ como lado, retiremos 4 triângulos iguais ao dado. Se fizermos isso como na figura à esquerda, obteremos um quadrado de lado c. Mas se a mesma operação for feita como na figura à direita, restarão dois quadrados, de lados a e b respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b.

Essa é, provavelmente, a mais bela demonstração do teorema de Pitágoras. Entretanto, no livro de Loomis ela aparece sem maior destaque, como variante de uma das provas dadas, não sendo sequer contada entre as 370 numeradas.

Apresentamos a seguir algumas demonstrações do teorema de Pitágoras que têm algum interesse especial, por um motivo ou por outro. As 4 primeiras constam da lista do Professor Loomis.

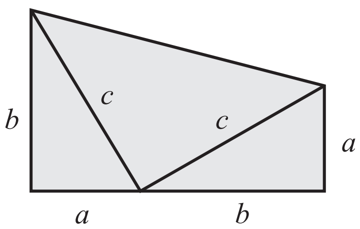
A prova mais curta

É também a mais conhecida. Baseia-se na seguinte conseqüência da semelhança de triângulos retângulos: "Num triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela". Assim, se m e n são respectivamente as projeções dos catetos a e b sobre a hipotenusa c, temos $a^2 = mc$, $b^2 = nc$, enquanto $m + n = c$. Somando, vem $a^2 + b^2 = c^2$.



A demonstração do presidente

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos durante apenas 4 meses (pois foi assassinado em 1881), era também general e gostava de Matemática. Ele deu uma prova do teorema de Pitágoras baseada na seguinte figura.

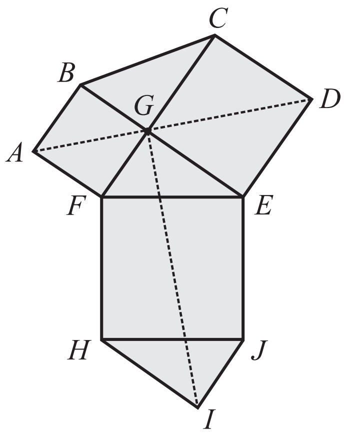


A área do trapézio com bases a, b e altura $a + b$ é igual à semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de 3 triângulos:

$$\frac{a+b}{2}(a+b) = \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2},$$

implicando $a^2 + b^2 = c^2$.

A demonstração de Leonardo da Vinci

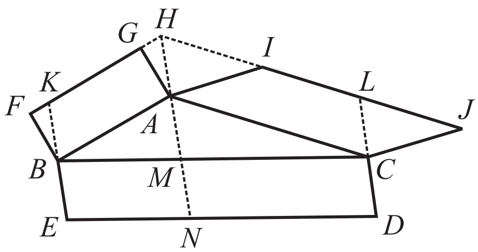


O grande gênio também concebeu uma demonstração do teorema de Pitágoras, que se baseia na figura ao lado.

Os quadriláteros *ABCD*, *DEFA*, *GFHI* e *GEJI* são congruentes. Logo, os hexágonos *ABCDEF* e GEJIHF têm a mesma área. Daí resulta que a área do quadrado *FEJH* é a soma das áreas dos quadrados *ABGF* e *CDEG*.

A demonstração de Papus

Na realidade, não se trata apenas de uma nova demonstração, mas de uma generalização bastante interessante do teorema de Pitágoras. Em vez de um triângulo retângulo, toma-se um triângulo arbitrário *ABC*; em vez de quadrados sobre os lados, tomam-se paralelogramos, sendo dois deles quaisquer, exigindo-se que o terceiro cumpra a condição de *CD* ser paralelo a *HA*, e com o mesmo comprimento.



O teorema de Papus afirma que a área do paralelogramo *BCDE* é a soma das áreas de *ABFG* e *AIJC*. A demonstração se baseia na simples observação de que dois paralelogramos com bases e alturas de mesmo comprimento têm a mesma área.

Assim, por um lado, *AHKB* tem a mesma área que *ABFG* e, por outro lado, a mesma área que *BMNE*. Segue-se que as áreas de *BMNE* e *ABFG* são iguais. Analogamente, são iguais as áreas de *CDNM* e *CAIJ*. Portanto, a área de *BCDE* é a soma das áreas de *ABFG* e CAIJ.

O teorema de Pitágoras é caso particular do de Papus. Basta tomar o triângulo *ABC* retângulo e três quadrados em lugar dos três paralelogramos.

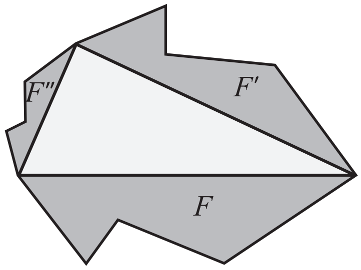
O argumento de Polya

No meu entender, entretanto, a demonstração mais inteligente do teorema de Pitágoras não está incluída entre as 370 colecionadas pelo Professor Loomis. Ela se acha no livro *Induction and Analogy in Mathematics*, de autoria do matemático húngaro George Polya.

O raciocínio de Polya se baseia na conhecida proposição, segundo a qual "as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança".

Lembremos que duas figuras F e F' dizem-se *semelhantes* quando a cada ponto A da figura F corresponde um ponto A' em F', chamado o seu *homólogo*, de tal maneira que se, A, B são pontos quaisquer de F e A', B' são seus homólogos em F' então a razão $A'B'/AB$ é uma constante k, chamada a *razão de semelhança* de F para F'. Por exemplo, dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos de um deles são congruentes aos ângulos do outro. Por outro lado, dois quadrados quaisquer, um de lado ℓ e outro de lado ℓ', são semelhantes e a razão de semelhança do primeiro para o segundo é $k = \ell'/\ell$.

Em vez do teorema de Pitágoras, Polya procura provar a seguinte proposição mais geral (que, diga-se de passagem, já se acha nos *Elementos* de Euclides):



Se F, F′ e F″ são figuras semelhantes, construídas respectivamente sobre a hipotenusa c e sobre os catetos a, b de um triângulo retângulo, então a área de F é igual à soma das áreas de F′ e F″.

O enunciado acima implica que a razão de semelhança de F' para F'' é b/a, de F' para F é c/a e de F'' para F é c/b.

Por simplicidade, escrevamos F em vez de "área de F", G em vez de "área de G", etc.

Se G, G', G'' são outras figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa e os catetos, respectivamente, em virtude da proposição acima enunciada, teremos:

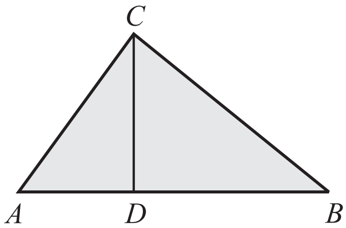
$$\frac{G'}{G''} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{F'}{F''}, \quad \text{logo} \quad \frac{G'}{G''} = \frac{F'}{F''}.$$

De modo análogo teremos $\dfrac{G'}{F'} = \dfrac{G}{F}$.

Portanto, $G/F = G'/F' = G''/F'' = \alpha$, digamos. Escrevendo de outro modo: $G = \alpha F$, $G' = \alpha F'$ e $G'' = \alpha F''$.

Que significam essas 3 últimas igualdades? Elas querem dizer que, se conseguirmos achar 3 figuras semelhante especiais F, F' e F'', construídas sobre a hipotenusa e os catetos do nosso triângulo, de tal maneira que se tenha $F = F' + F''$, então teremos também $G = G' + G''$ *sejam quais forem* as figuras semelhantes G, G' e G'' construídas do mesmo modo. Com efeito, teremos $G = \alpha F$, $G' = \alpha F'$ e $G'' = \alpha F''$, logo $G' + G'' = \alpha F' + \alpha F'' = \alpha(F' + F'') = \alpha F = G$.

Agora é só procurar as figuras especiais. Mas elas estão facilmente ao nosso alcance. Dado o triângulo retângulo ABC, tracemos a altura CD, baixada do vértice do ângulo reto C sobre a hipotenusa AB.



A figura F será o próprio triângulo ABC. Para F' escolheremos ADC e faremos $F'' = BCD$. Evidentemente, F, F' e F'' são figuras semelhantes. Mais evidentemente ainda, temos $F = F' + F''$.

Baseado no artigo
Mania de Pitágoras
Euclides Rosa, **RPM** 02

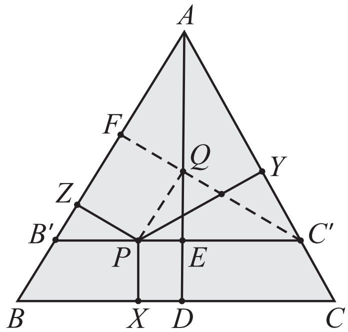
Usando áreas

Neste artigo, procuraremos mostrar que diversas demonstrações em Geometria e Trigonometria tornam-se fáceis e elegantes quando usamos o conceito de área. Como primeiro exemplo, comparemos duas soluções de um conhecido problema.

Provar que a soma das distâncias de um ponto qualquer interior a um triângulo equilátero aos lados é constante.

1ª *solução*

Consideremos o triângulo equilátero ABC da figura, um ponto P interior e as perpendiculares PX, PY e PZ aos seus lados. Tracemos por P, $B'C'$ paralelo a BC, nformando o triângulo equilátero $AB'C'$. Tracemos ainda as alturas AE e $C'F$ desse triângulo e a perpendicular PQ a $C'F$.



Pela congruência dos triângulos PQC' e PYC', concluímos que $PY = C'Q$ e, como $PQFZ$ é um retângulo, temos que $PZ = QF$. Logo,

$PY + PZ = C'Q + QF = C'F$. (Para simplificar a notação, usaremos o mesmo símbolo para representar um segmento ou a sua medida.)

Ora, as alturas AE e $C'F$ do triângulo equilátero $AB'C'$ são iguais e, portanto,

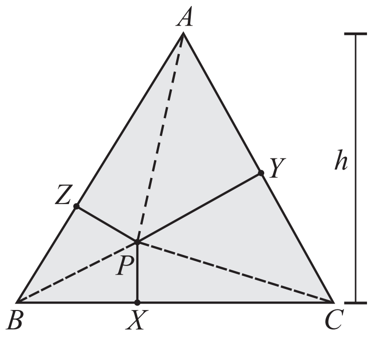
$$PY + PZ = AE. \qquad (1)$$

Prolongando AE até a base BC do triângulo, obtemos $ED = PX$. Finalmente, na igualdade (1), somamos PX do lado esquerdo e ED do lado direito para obter

$$PX + PY + PZ = AE + ED = AD, \text{ altura de } ABC.$$

2ª solução

Consideremos agora o triângulo equilátero ABC com lado a e altura h, como na figura ao lado. Traçando os segmentos PA, PB e PC, temos que a soma das áreas dos triângulos PBC, PCA e PAB é igual à área de ABC. Logo,



$$\frac{aPX}{2} + \frac{aPY}{2} + \frac{aPZ}{2} = \frac{ah}{2}$$

e o problema está resolvido. Repare que na primeira solução usamos apenas o conceito de congruência de triângulos, mas a construção das linhas auxiliares pode ser considerada um pouco artificial. Na segunda solução, quando o conceito de área foi utilizado, o resultado apareceu de forma bem mais natural.

Vejamos, então, alguns teoremas que podem ser demonstrados com o auxílio das áreas.

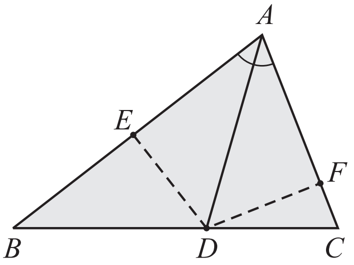
1) O teorema da bissetriz

A bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Esse enunciado quer dizer que se, AD for bissetriz do ângulo A do triângulo ABC, então $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Para demonstrar, é preciso lembrar que, se dois triângulos possuem mesma altura, a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Portanto, na figura, a razão entre as áreas dos triângulos ADB e ADC é igual a BD/DC. Por outro lado, qualquer ponto da bissetriz de um ângulo eqüidista de seus lados e, portanto, as perpendiculares DE e DF aos lados AB e AC são iguais. Logo,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\mathcal{A}\ (ABD)}{\mathcal{A}\ (ADC)} = \frac{\frac{1}{2}AB.DE}{\frac{1}{2}AC.DF} = \frac{AB}{AC}$$



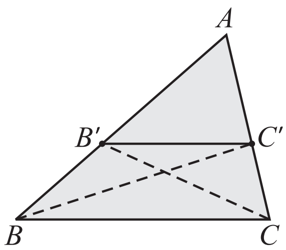
e o teorema está demonstrado.

2) O teorema de Tales

Sejam B' e C' pontos dos lados AB e AC, respectivamente, do triângulo ABC. Se $B'C'$ for paralelo a BC, então $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$.

Demonstração

Se $B'C'$ é paralelo a BC, então os triângulos $B'C'B$ e $B'C'C$ têm mesma área porque possuem mesma base $B'C'$ e alturas relativas a essa base também iguais. Acrescentando a esses triângulos o triângulo $AB'C'$, concluímos que os triângulos ABC' e $AB'C$ também possuem mesma área. Se dois triângulos possuem mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases, logo,



$$\frac{AB'}{AB} = \frac{\mathcal{A}\ (AB'C')}{\mathcal{A}\ (ABC')} = \frac{\mathcal{A}\ (AB'C')}{\mathcal{A}\ (AB'C)} = \frac{AC'}{AC}$$

o que prova o teorema.

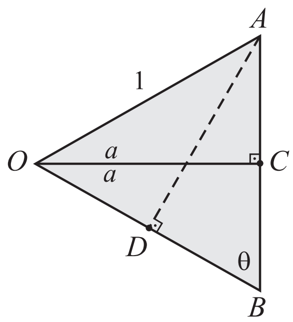
O teorema de Tales e sua recíproca são importantíssimos em Geometria porque a partir deles podemos obter os teoremas relativos à semelhança de triângulos e as propriedades da homotetia. A vantagem da demonstração que aqui apresentamos está no fato que nela não importa se os segmentos AB' e AB são comensuráveis ou não. A demonstração tradicional, que usa o feixe de paralelas, só fica completa com a incômoda passagem ao limite.

3) As fórmulas trigonométricas

As funções trigonométricas aparecem pela primeira vez na escola secundária, definidas para ângulos agudos, como razões entre lados de um triângulo retângulo. Usando figuras particulares, conseguimos calcular os valores das funções trigonométricas para 30°, 45°, 60° e 18° e podemos antecipar diversas fórmulas que, mais tarde, serão deduzidas em contexto mais geral. Para ilustrar, vamos mostrar a fórmula do seno do arco duplo.

$$\text{Se } 0° < a < 45°, \text{ então } \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

Para demonstrar, consideremos a figura formada por dois triângulos retângulos congruentes OCA e OCB, em que fizemos $OA = OB = 1$.



Temos, então, que $CA = CB = \operatorname{sen} a$, $OC = \cos a$ e, traçando AD perpendicular a OB, $AD = \operatorname{sen} 2a$. Ora, o dobro da área do triângulo OAB é igual a $OB \cdot AD$ e também é igual a $AB \cdot OC$.

Logo, $1 \times \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$, ficando demonstrada a fórmula.

4) A lei dos senos

Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Para uma demonstração alternativa da lei dos senos, podemos partir do fato de que a área, $\mathcal{A}$, de um triângulo é igual à metade do produto de dois lados pelo seno do ângulo formado por eles, ou seja,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} ba \operatorname{sen} C.$$

Ora, considerando a primeira igualdade e multiplicando por a ambos os membros, obtemos

$$a\mathcal{A} = \frac{1}{2} abc \operatorname{sen} A \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}.$$

Como o mesmo pode ser feito para as outras igualdades, concluímos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Muitos problemas possuem também soluções bonitas e elegantes "usando áreas" e este artigo termina convidando o leitor a incluir a idéia em sua caixa de ferramentas de solução de problemas.

Baseado no artigo
Usando áreas
Eduardo Wagner, **RPM** 21

Trigonometria e um antigo problema de otimização

Regiomontanus

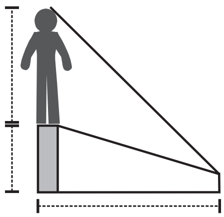
A cidade de Köningsberg, na Prússia (atual Kalimingrado, na Rússia), é conhecida na Matemática devido ao famoso problema das pontes (ver artigo neste livro), resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Outro acontecimento importante que marca a vida da cidade, cujo nome significa Montanha do Rei, é o fato de nela ter nascido Johann Müller (1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV, mais conhecido como *Regiomontanus*, uma latinização do nome de sua cidade natal.

Regiomontanus realizou diversos estudos nas áreas de Astronomia, Geometria e Trigonometria. Em seu livro mais famoso, *De Triangulus Omnimodes*, escrito em 1464 e impresso apenas em 1533, Regiomontanus apresenta uma visão moderna da Trigonometria com dados tabelados de várias funções trigonométricas. É curioso notar que, mesmo tendo sido escrito antes do conceito de notação decimal, as tabelas trigonométricas contidas no livro não apresentam frações devido à utilização de um círculo de raio 100 000 000 de unidades, o que produzia apenas valores inteiros para as aproximações utilizadas.

A importância dos conhecimentos em Astronomia de Regiomontanus fez com que ele fosse convidado pelo Papa Sisto IV para trabalhar na confecção de um calendário mais acurado do que o que vinha sendo usado pela Igreja. Após a realização do trabalho, a gratidão do Papa foi tal que rapidamente o astrônomo se tornou seu principal conselheiro. Depois de um ano em Roma, Regiomontanus faleceu, tendo sido anunciado, como causa de sua morte, o flagelo de uma peste. Existem especulações de que ele tenha sido envenenado por alguma pessoa descontente com a alta influência de um “não italiano” sobre o Papa e a Igreja romana. Alguns historiadores especulam ainda que, se não tivesse falecido tão cedo, talvez tivesse condições de realizar uma moderna compreensão do sistema solar, como a feita por Copérnico, 100 anos depois.

Entre os interessantes problemas propostos por Regiomontanus, destacamos um de 1471 como o primeiro problema de extremos encontrado na História da Matemática desde a antiguidade. O problema é o seguinte:

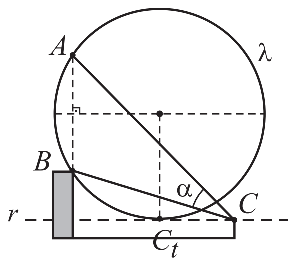
Suponha uma estátua de altura h *sobre um pedestal de altura* p. *Um homem de altura* m $(m < p)$ *enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo* α, *que varia de acordo com a distância* d *entre o homem e a base do pedestal. Determinar* d *para que o ângulo de visão seja o maior possível.*



Uma solução engenhosa para o problema

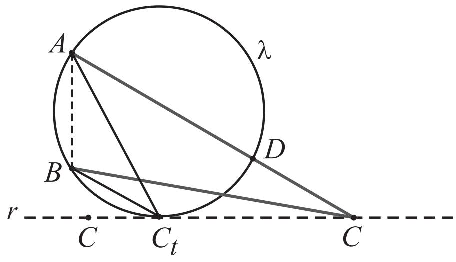
Apesar de o problema poder ser resolvido com técnicas do Cálculo, apresentamos uma solução que, embora engenhosa, dispensa essas técnicas.

Inicialmente marcamos na figura os pontos A, B e C representando respectivamente o topo da estátua, o pé da estátua e os olhos do observador. Em seguida, traçamos a reta r que passa por C e é paralela à linha do chão. Traçamos então a única circunferência λ, com centro na mediatriz do segmento AB, que passa pelos pontos A e B e tangencia a reta r. Chamamos de C_t o ponto de tangência da circunferência com a reta r. Se C percorrer livremente a reta r, qualquer possibilidade para o ângulo de visão, α, será dada por uma localização de C em r.



Provaremos que α assume o maior valor possível quando C coincide com C_t. Para isso, mostraremos que, se β é a medida do ângulo AC_tB, então $\beta \geq \alpha$ para qualquer posição de C diferente de C_t.

Se D é o ponto de encontro da reta AC com a circunferência λ, temos que β é também a medida do ângulo ADB e, denotando por γ a medida do ângulo CBD, tem-se, no triângulo BCD,



$\alpha + \gamma + 180° - \beta = 180°$. Logo, $\beta = \alpha + \gamma$ implicando $\beta > \alpha$.

Uma vez verificado que AC_tB é o ângulo de máximo campo visual, determinaremos agora a distância d, entre o observador e a base do pedestal, para que esse ângulo seja atingido.

Se Q é o ponto de intersecção da reta AB com r, sendo as retas r e AB, respectivamente, tangente e secante a λ aplicando potência no ponto Q encontraremos a distância d procurada:

$$(QC_t)^2 = QB.QA \quad \text{ou} \quad d^2 = (p - m)(p - m + h)$$

Uma aplicação

Em outubro de 1931, após cinco anos de construção, foi inaugurado no alto do morro do Corcovado o cartão de visitas do Rio de Janeiro, a estátua do Cristo Redentor. A altura total da estátua é de 30 m, seu pedestal mede 8 m, e admitiremos um observador com 1,70 m de altura.

A que distância esse observador deve ficar da base do pedestal do Cristo Redentor para que o seu ângulo de visão seja o maior possível?

Usando a fórmula $d^2 = (p - m)(p - m + h)$ para $p = 8$ m, $m = 1{,}70$ m e $h = 30$ m, obtemos uma distância de aproximadamente 15 m. Seria preciso, porém, que o terreno em volta do Cristo fosse aproximadamente plano dentro desse raio.

Baseado no artigo
Trigonometria e um antigo problema de otimização
José Luiz Pastore Mello, **RPM** 52

Vale para 1, para 2, para 3, ... Vale sempre?

As afirmações abaixo, sobre números naturais, são verdadeiras para os números 1, 2, 3 e muitos outros. Perguntamos: elas são verdadeiras **sempre**?

Verdadeiro ou falso?

1. $\forall\, n \in N$, $n < 100$.
2. $\forall\, n \in N$, $n^2 + n + 41$ é um número primo.
3. $\forall\, n \in N^*$, $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito.
4. $\forall\, n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.
5. $\forall\, n \in N^*$, $2n + 2$ é a soma de dois números primos.

Vejamos:

1. "$n < 100$" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros, mas torna-se falsa para qualquer número natural maior do que 99. Portanto,

"$\forall\, n \in N$, $n < 100$" é uma sentença *falsa*.

2. "$n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros. De fato, ela é verdadeira para todos os números naturais menores do que 40 (o que foi verificado por Euler em 1772). Porém, o número

$40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41 \times 41$ não é primo, mostrando que a sentença

"$\forall\, n \in N$, $n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma sentença *falsa*.

3. "$991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, mesmo após muitas e muitas tentativas, não se acha um número que a torne falsa.

Pudera! O *menor* número natural n para o qual $991n^2 + 1$ é um quadrado perfeito é

12 055 735 790 331 359 447 442 538 767 e, portanto, a sentença

"$\forall\, n \in N^*$, $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito" é *falsa*.

4. "A soma dos n primeiros números ímpares é n^2" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, como no caso anterior, após muitas e muitas tentativas, não se acha um número natural que a torne falsa. Neste caso, tal número não existe, pois, como veremos adiante, essa sentença é *verdadeira sempre*.

5. "$2n + 2$ é a soma de dois números primos" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, como nos dois exemplos anteriores, após muitas e muitas tentativas, não se encontra um número natural que a torne falsa. Mas agora temos uma situação nova: ninguém, até hoje, encontrou um número que tornasse a sentença falsa e ninguém, até hoje, sabe demonstrar que a sentença é verdadeira sempre.

A sentença é a famosa conjetura de Goldbach feita em 1742, em uma carta dirigida a Euler:

Todo inteiro par, maior do que 2, é a soma de dois números primos.

Não se sabe, até hoje, se essa sentença é verdadeira ou falsa.

Em suma, dada uma afirmação sobre números naturais, se encontrarmos um contra-exemplo, saberemos que a afirmação não é sempre verdadeira. E se não acharmos um contra-exemplo? Nesse caso, suspeitando que a afirmação seja verdadeira sempre, uma possibilidade é tentar demonstrá-la recorrendo ao princípio da indução.

Princípio da indução finita

"Seja S um conjunto de números naturais, com as seguintes propriedades:

1. $0 \in S$

2. $\forall\, k \in N$, se $k \in S$, então $k + 1 \in S$.

Nessas condições, $S = N$."

Vamos ver como esse princípio nos permite demonstrar que é verdadeira a sentença 4: "$\forall\, n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2".

Demonstração

Seja S o conjunto dos números naturais n para os quais a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

1. $1 \in S$, pois a soma dos 1 primeiros números ímpares é $1 = 1^2$.

2. Vamos supor que $k \in S$, isto é, que a soma dos k primeiros números ímpares seja k^2.

Vamos provar que $k + 1 \in S$, isto é, que a soma dos $k + 1$ primeiros números ímpares é $(k + 1)^2$.

Estamos supondo que $1 + 3 + 5 + ... + 2k - 1 = k^2$ e queremos provar que

$1 + 3 + 5 + ... + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Basta observar que

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

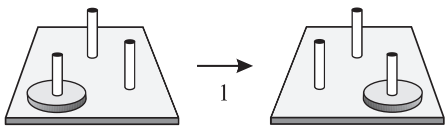
O princípio da indução nos garante, agora, que $S = IN^*$, ou seja, a afirmação "a soma dos n primeiros ímpares é n^2" é verdadeira para todos os números naturais maiores do que zero.

Uma lenda

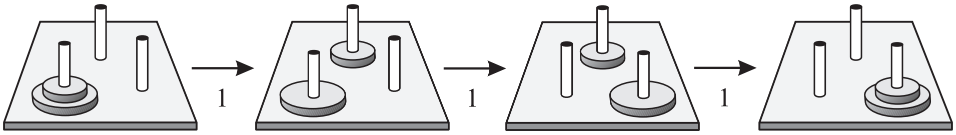
Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: "Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco fique acima de um menor. Quando terminarem esta tarefa e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá a pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará".

Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de um disco por segundo. Será que veremos o mundo acabar?

Como é muito difícil imaginar os movimentos feitos com uma pilha de 64 discos, imaginemos uma pilha com *Um disco*: a transferência se dá com apenas 1 movimento: $m_1 = 1$.

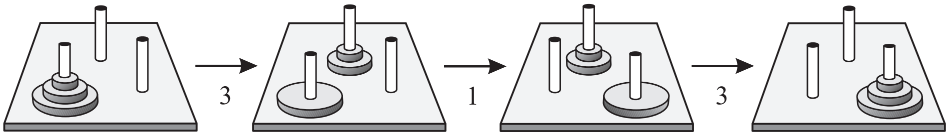


Dois discos

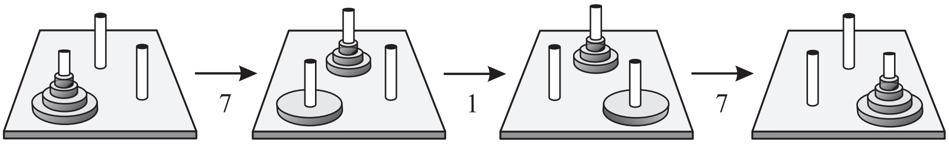


Para 2 discos, a transferência requer 3 movimentos: $m_2 = 3$.

Três discos: $m_3 = 7$.



Quatro discos: $m_4 = 15$.



Já podemos deduzir como deslocar n discos com um menor número possível de movimentos. Para tal, observe que o deslocamento do maior disco, do bastão em que se encontra inicialmente para um outro, requer que esse segundo bastão esteja vazio, pois o maior disco não pode ficar sobre um menor. Como, para se mover o maior disco, nenhum outro pode estar sobre ele, todos os outros discos terão que estar no terceiro bastão. Assim, a estratégia com menor número de movimentos será: movem-se $n - 1$ discos para o bastão de trás, com m_{n-1} movimentos; em seguida, move-se o n-ésimo disco para o outro bastão da frente, com 1 movimento; finalmente movem-se os $n - 1$ discos do bastão de trás para o da frente, com m_{n-1} movimentos. Tem-se:

$$m_n = m_{n-1} + 1 + m_{n-1} = 2m_{n-1} + 1$$

Façamos uma tabela com o número de discos e o número de movimentos mínimo para mudá-los de um bastão para outro:

n	1	2	3	4	5	6	...
m_n	1	3	7	15	31	63	...

Precisamos descobrir o valor de m_{64} porque, m_{64} segundos após a criação do mundo, ele acabará e já se passaram 4 bilhões de anos!

Observando a segunda linha da tabela, vemos que os seus números são, a menos de 1: 2, 4, 8, 16, 32, 64, ou seja, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, o que nos leva a fazer a seguinte conjetura:

$$m_n = 2^n - 1$$

Essa sentença é verdadeira para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, mas será verdadeira sempre?

Tentemos demonstrá-la por indução.

Seja S o conjunto dos números naturais n tais que n discos são movidos com $2^n - 1$ movimentos.

1. $1 \in S$, pois para 1 disco necessitamos de $1 = 2^1 - 1$ movimentos.

2. Vamos supor que $k \in S$, isto é, k discos são removidos com $2^k - 1$ movimentos.

Vamos provar que $k + 1 \in S$, isto é, que $m_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Já vimos que $m_{k+1} = 2m_k + 1$.

$$m_{k+1} = 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1,$$

e isso mostra que $k + 1 \in S$.

O princípio da indução nos garante que n discos podem sempre ser removidos com $2^n - 1$ movimentos e, em particular, $m_{64} = 2^{64} - 1$.

E assim ficamos sabendo que, $2^{64} - 1$ segundos após a criação do mundo, ele terminará. Com um pouco mais de Matemática ficaremos sabendo se isso ocorrerá logo.

Façamos alguns cálculos.

Quantos segundos tem um ano?

Resposta:

$$60 \times 60 \times 24 \times 365\frac{1}{4} = 31\,557\,600 < 2^{25} = 1024 \times 1024 \times 32 = 33\,554\,432.$$

Exagerando, vamos supor que os monges façam 2^{25} movimentos por ano (na verdade fazem uns milhões a menos). Com isso, o mundo acabará

em $\dfrac{2^{64}}{2^{25}} = 2^{39}$ anos.

$$2^{39} = 2^{10} \text{ x } 2^{10} \text{ x } 2^{9} = 1\,024 \text{ x } 1\,024 \text{ x } 1\,024 \text{ x } 512 > 512 \text{ x } 10^{9}$$

Passaram-se até hoje 4 bilhões de anos, ou seja, 4 x 10^9 anos.

Podemos ficar tranqüilos – faltam mais do que 508 bilhões de anos para os monges terminarem sua tarefa – isso, supondo que eles não errem no caminho.

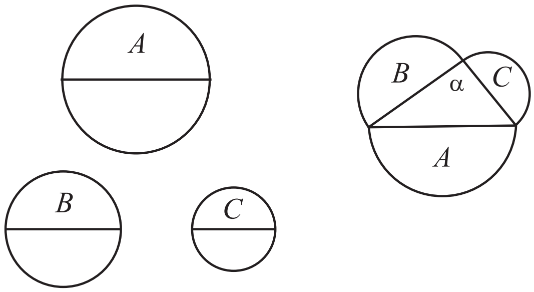
Baseado no artigo
Vale para 1, para 2, para 3, ...
Vale sempre?
Renate Watanabe, **RPM** 09

Semelhanças, pizzas e chopes

As histórias que vamos contar envolvem dois amigos que gostam de freqüentar bares e restaurantes, além de discutir problemas de Matemática. Em pelo menos duas situações, surgiram interessantes problemas cujas soluções, além de elegantes, são bastante educativas.

Primeira história

Augusto e João foram a um restaurante para comer pizza. O primeiro pediu uma grande e o segundo, uma média e uma pequena, todas do mesmo sabor. Curiosamente, o preço da pizza grande era exatamente igual à soma dos preços das pizzas média e pequena. Logo após os pedidos, surgiu naturalmente o problema de saber quem vai comer mais. O fato de os preços a pagar serem iguais não quer dizer nada, porque, nos restaurantes, o preço não costuma ser proporcional à quantidade de comida servida. Augusto argumenta que, se tivesse uma régua, poderia medir os diâmetros, calcular as áreas e verificar se a área da pizza grande é maior, igual ou menor do que a soma das áreas das outras duas. Porém, não havia régua disponível. Pensando um pouco, João, bom geômetra, declarou ter resolvido o problema, dizendo que assim que as pizzas chegassem diria quem comeria mais, e para isso usaria apenas objetos que estavam em cima da mesa. Augusto, estupefato, duvidou. “Como é possível? Não temos instrumento de medida algum. Em cima da mesa só há talheres, copos, guardanapos e o cardápio, responsável por nossa incrível discussão!” A espera não foi longa e as pizzas chegaram. Rapidamente, então, João cortou ao meio cada uma delas, obtendo as àreas A, B e C.



Sobre a mesa (de mármore) juntou os diâmetros para formar um triângulo.

Utilizando o canto do cardápio como um modelo para o ângulo reto, João verificou que o ângulo, α, oposto ao diâmetro da maior metade era menor do que 90° e declarou "eu como mais". E Augusto, após pensar alguns momentos, concordou.

Qual é a explicação?

A explicação depende de dois resultados importantes. O primeiro bastante conhecido e o segundo não muito.

1. *A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.*

2. *Se figuras semelhantes são construídas sobre a hipotenusa e sobre os catetos de um triângulo retângulo, então a área da figura maior é igual à soma das áreas das outras duas.*

A demonstração desse segundo resultado pode ser vista no artigo *Mania de Pitágoras*, publicado neste mesmo exemplar.

Para concluir que no nosso problema João estava certo, observe que, se α é *o* ângulo oposto ao lado a do triângulo de lados a, b e c, temos:

$$\alpha < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow A < B + C,$$

$$\alpha > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow A > B + C,$$

Portanto, se na nossa história João constatou que o ângulo α era menor que 90°, então a área da semipizza grande era menor que a soma das áreas das outras duas metades.

Segunda história

Dias depois, Augusto, afobado com o calor, senta em um bar e pede um chope (na verdade, o primeiro de muitos). Nesse lugar, o chope é servido em “tulipas”, que são copos com a forma de um cone invertido. O garçom chega com a bebida ao mesmo tempo que João encontra seu amigo. “Como vai, João? Sente e tome rápido a metade deste copo. Eu tomo a outra metade.” A fisionomia de João mostra alguma tristeza. Como determinar a altura do nível da bebida quando um copo cônico contém a metade do seu conteúdo? Augusto então alivia a situação. “Meu caro amigo, para esse problema, seus artifícios são insuficientes. Eu hoje vim prevenido e trouxe uma régua e uma calculadora. Desculpe a brincadeira e vamos juntos resolver o nosso problema.”

Augusto então saca de sua régua, calculadora, caneta e sobre um guardanapo mostra a solução sob o olhar de um estupefato garçom.

– Observe, João, que o copo tem 20 cm de altura. Desejamos obter a altura da superfície do líquido que corresponda à metade do volume do copo. Para isso, precisamos recordar dois outros fatos:

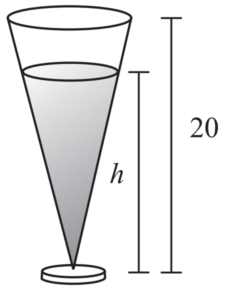
3. *Toda seção paralela à base de um cone forma um outro cone semelhante ao primeiro.*

4 . *A razão entre o volume de sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.*

Augusto continua sua explicação.

“ Se você tiver tomado uma parte do conteúdo deste copo, teremos aqui, por **2**, dois objetos semelhantes: o cone formado pelo líquido e o próprio copo. A razão de semelhança entre esses dois cones é a razão entre suas alturas, ou seja, $h/20$. Como desejamos que o líquido tenha a metade do volume do copo, por **3**, podemos escrever:

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{h}{20}\right)^3, \text{ ou seja, } \frac{h}{20}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$



Assim, a altura que corresponde à metade do volume do copo é $h = 10\sqrt[3]{4}$ cm.”

João concorda com a perfeita explicação, mas repara que a resposta não resolve ainda o problema porque ele não tem a menor idéia de quanto é $10\sqrt[3]{4}$. E então Augusto, com a sua calculadora e seu sorriso irônico, diz: – "Ah! é bom saber que esse valor dá aproximadamente 16 cm".

Bem. O problema foi resolvido e o chope, já meio quente, foi adequadamente dividido. Falta apenas o final da história.

Nessa altura, as pessoas das outras mesas ouviam atentamente nossos personagens com um misto de admiração e espanto. Nisso, João faz uma descoberta, que anuncia em alto e bom som: – " Esse problema me revela que quando somos servidos em tulipas com 4 cm de colarinho estamos tomando apenas metade do conteúdo do copo. Assim, se eu digo que tomei 10 chopes, na verdade tomei 5, mas paguei 10!".

E foram expulsos do bar.

Baseado no artigo
Semelhanças, pizzas e chopes
Eduardo Wagner, **RPM** 25

Sorrisos, sussurros, antenas e telescópios

Elipses, sorrisos e sussurros

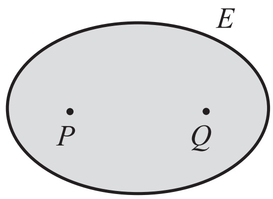
Para cuidar do sorriso dos pacientes, os dentistas utilizam uma luminária com espelho elíptico.

De maneira diferente dos holofotes comuns, como os faróis de carro, que refletem os raios luminosos em uma mesma direção (valendo-se, para isso, de um espelho parabólico), os holofotes dentários se valem de espelhos elípticos para concentrar os raios luminosos emitidos pela lâmpada em um determinado ponto: o dente a ser tratado.

Isso é possível devido ao fato de que, como veremos adiante, todo raio emitido em um dos focos se dirigirá, após a reflexão no espelho elíptico, exatamente para o outro foco (estamos pensando na elipse plana com focos na lâmpada e no dente sendo tratado e parcialmente contida no espelho elíptico). Isso também explica o funcionamento de diversos aparelhos de emissão de raios usados em tratamentos médicos, como, por exemplo, o de radioterapia, cujos raios devem destruir os tecidos doentes sem afetar os tecidos sadios que se encontram ao redor.

Já as salas de sussurros são construções de forma oval onde estão marcados dois pontos no chão. Duas pessoas em pé, uma em cada um desses pontos, podem se comunicar em voz sussurrada, inaudível no restante da sala. A forma da sala é de fundamental importância.

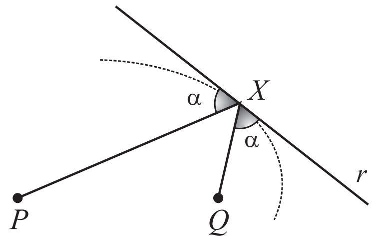
Ao projetá-la, fixam-se dois pontos P e Q, que ficam na altura da cabeça das pessoas que vão se comunicar. A seguir, toma-se uma elipse E que admita P e Q como focos, e a sala é construída de tal maneira que *qualquer plano que passe por esses pontos intercepte a sala segundo uma elipse congruente com a escolhida*.



A elipse de focos P e Q é por definição o conjunto dos pontos de um plano por P e Q tais que a soma das distâncias do ponto aos focos é constante. Assim, todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos, ao se refletirem nas paredes da sala, chegarão ao segundo foco tendo percorrido a mesma distância, ou seja, ao mesmo tempo, o que, sem dúvida, proporciona uma amplificação natural do som, explicando o funcionamento das salas de sussurros. Vejamos então uma propriedade da elipse da qual decorre a propriedade de reflexão mencionada.

Propriedade

Seja uma elipse E com focos P e Q e seja um ponto $X \in E$. Nesse caso a reta r, tangente a E em X, forma ângulos iguais com PX e QX.



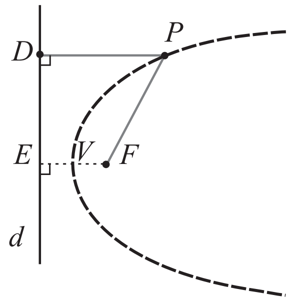
Para não quebrar a continuidade do estudo das propriedades de reflexão das outras cônicas, colocamos a demonstração da propriedade da elipse no final do artigo.

Para concluir que a propriedade da elipse garante os fenômenos anteriormente citados, lembremos duas leis físicas sobre a reflexão. A primeira diz que o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão em um plano são iguais. A outra lei diz que a reflexão em cada ponto de uma superfície se comporta como se fosse no plano tangente à superfície, no respectivo ponto. Logo, a propriedade garante os fenômenos de reflexão mencionados.

Por que as antenas são parabólicas?

A palavra *parábola* está, para os estudantes do ensino médio, associada ao gráfico da função do segundo grau. Entretanto, quase todos conhecem as antenas parabólicas, mas nem todos fazem ligação entre uma coisa e outra. Os espelhos dos telescópios e dos faróis dos automóveis também são parabólicos. Por quê?

Consideremos uma reta d e um ponto F. A parábola de foco F e diretriz d é, por definição, o conjunto de todos os pontos do plano definido por F e d cuja distância à reta d é igual à distância ao ponto F. O segmento EF chama-se parâmetro da parábola e o ponto médio V, médio de EF, é o vértice da parábola.

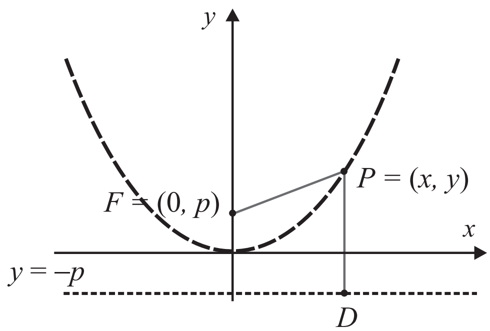


A equação da parábola

Em um sistema de coordenadas, não é difícil encontrar a equação da parábola, dados o foco e a diretriz. Tomemos $F = (0, p)$ como foco e $y = -p$ como diretriz.

Se $P = (x, y)$ é tal que $PF = PD$, temos: $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p$.

Elevando ao quadrado e cancelando os termos iguais dos dois lados, obtemos: $x^2 = 4py$ ou $y = \frac{1}{4p}x^2$, o que mostra que a equação de uma parábola é da forma $y = ax^2$ (uma função polinomial de grau 2).

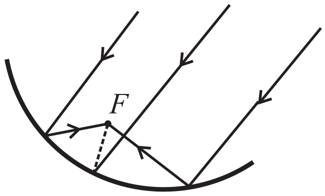


Reciprocamente, dada uma função da forma $y = ax^2$, é fácil provar que qualquer um de seus pontos possui distância ao ponto $(0, \frac{1}{4a})$ igual à distância à reta $y = -\frac{1}{4a}$, o que mostra que o gráfico de $y = ax^2$ é uma parábola. Com um pouco mais de trabalho, o leitor poderá demonstrar que o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) é também uma parábola, exatamente igual ao gráfico de $y = ax^2$, mas agora com vértice no ponto

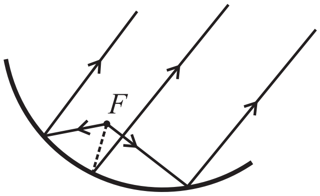
$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right).$$

Antenas e espelhos

Vamos voltar agora às nossas perguntas iniciais. Por que as antenas que captam sinais do espaço são parabólicas? Por que os espelhos dos faróis dos carros são parabólicos? Nas antenas os sinais que recebemos (ondas de rádio ou luz) são muito fracos. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena (ou do espelho) deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão. Nos faróis dos carros usa-se a propriedade em direção contrária: os raios de luz emitidos pela lâmpada se refletem no espelho parabólico e saem paralelos iluminando uma região maior.



antena

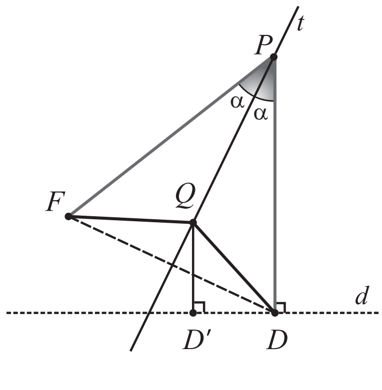


farol

Esses fenômenos são garantidos pela propriedade enunciada a seguir. Não demonstraremos aqui essa propriedade, uma vez que sua demonstração é análoga à correspondente para a elipse (consultar a **RPM** 33, p. 14).

Propriedade

Consideremos agora um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d. Se PD é perpendicular à reta d, então a reta tangente à parábola em P forma ângulos iguais com PF e PD.



A hipérbole e os telescópios

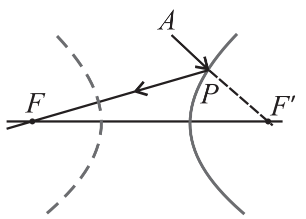
Dados dois pontos F e F', a hipérbole de focos nesses pontos é o conjunto dos pontos de um plano por F e F' cuja diferença das distância a F e F' é uma constante.

De modo análogo à elipse e à parábola, a hipérbole também tem uma propriedade de reflexão que é conseqüência da enunciada a seguir (os interessados poderão encontrar uma demonstração na **RPM** 34, p. 27).

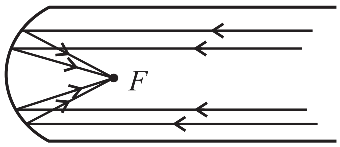
Propriedade

Seja uma hipérbole com focos F e F' e seja um ponto P da hipérbole. Nesse caso, a reta t, tangente à hipérbole em P, forma ângulos iguais com PF e PF'.

A propriedade garante que um raio de luz proveniente de um ponto A, de forma que a reta AP passe pelo foco F', que incide num espelho hiperbólico em P, seja refletido de modo a passar pelo outro foco F.

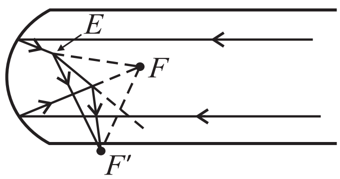


O telescópio refletor nada mais é do que um espelho parabólico no fundo de um tubo. Os raios provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.) formam um feixe praticamente paralelo, que se reflete no espelho e vai formar a imagem do objeto no foco F.

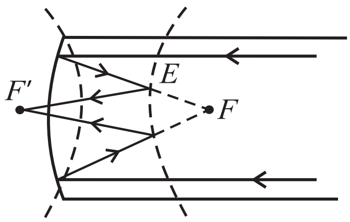


O problema agora é que, para observar essa imagem, o observador teria de estar com seu olho no foco da parábola, mas isso é impossível na prática.

Isaac Newton (1642-1727) resolveu esse problema em seu telescópio refletor, colocando um espelho plano E entre o espelho parabólico e o foco F. Com isso, os raios que iriam formar a imagem em F são novamente refletidos e vão formar essa imagem num ponto F' fora do tubo do telescópio, onde se posiciona o observador.



Em 1672 o astrônomo francês *Cassegrain* propôs a utilização de um espelho hiperbólico E, em lugar do espelho plano de Newton. Um dos focos da hipérbole coincide com o foco F da parábola.



Agora os raios que iriam formar a imagem no foco F são refletidos pelo espelho E e formarão essa imagem no outro foco F' da hipérbole.

Para compreender a vantagem desse espelho hiperbólico de Cassegrain sobre o espelho plano de Newton, devemos observar que o espelho plano não pode ficar muito próximo do foco F, sob pena de o ponto F' ficar dentro do telescópio; em conseqüência, o espelho plano precisa ser de razoável tamanho, o que resulta num bloqueio significativo da luz incidente no espelho parabólico que forma a parte principal do telescópio.

O espelho de Cassegrain, pelo contrário, pode ser construído mais próximo ou mais afastado do foco F, mantendo-se fixa a distância FF' entre os focos da hipérbole; em conseqüência, o tamanho desse espelho pode ser maior ou menor. A distância entre os focos F e F' também pode ser alterada sem mudar a posição do foco F. A combinação desses fatores permite grande flexibilidade na montagem do refletor hiperbólico E, adequando-a, assim, às exigências das observações.

Demonstração da propriedade da elipse

Lembramos que, tal como na circunferência, uma reta r é tangente a uma elipse E no ponto X se, e somente se, $r \cap E = \{X\}$.

Denotando a distância entre dois pontos R e S por $d(R, S)$ e caracterizando a elipse E como o lugar geométrico dos pontos X que satisfazem a propriedade métrica,

$$d(X, P) + d(X, Q) = k \ \text{(constante)},$$

segue-se que um ponto A *não estará* na elipse se e somente se

$$d(A, P) + d(A, Q) \neq k.$$

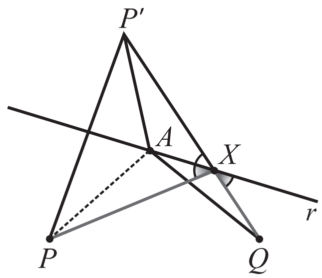
Logo, uma *reta* r será tangente à elipse E em um ponto X se e somente se intersectar E em X e qualquer que seja o ponto A em r, $A \neq X$, se tenha:

$$d(A, P) + d(A, Q) \neq d(X, P) + d(X, Q)$$

Seja, agora, um ponto X na elipse E e tomemos uma reta r (bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas PX e QX) passando por X de tal forma que o ângulo entre PX e r seja igual ao ângulo entre QX e r. Se mostrarmos que r é tangente a E em X, teremos mostrado a propriedade, devido à unicidade da tangente à elipse por um de seus pontos.

Seja X um ponto de E, logo $d(X, P) + d(X, Q) = k$. Tomemos sobre r um ponto $A \neq X$ e consideremos o ponto P', simétrico de P em relação a r.

A reta r é então mediatriz de PP'. Logo, $d(X, P) = d(X, P')$ e também $d(A, P) = d(A, P')$. Por construção, a reta r faz ângulos iguais com XP e XQ e, pela simetria, os ângulos AXP e AXP' são também iguais. Daí, os segmentos XQ e XP' fazem ângulos iguais com r e, portanto, os pontos P', X e Q são colineares.



Segue-se então:

$k = d(X, P) + d(X, Q) = d(X, P') + d(X, Q) = d(P', Q) < d(A, P') + d(A, Q)$ $= d(A, P) + d(A, Q)$, ou $d(A, P) + d(A, Q) > k$, o que mostra que $A \notin E$.

Concluímos que X é o *único* ponto de r que pertence à elipse, o que mostra que essa reta é tangente em X a essa elipse.

Baseado nos artigos

Por que as antenas são parabólicas?
Eduardo Wagner, **RPM** 33

A hipérbole e os telescópios
Geraldo Ávila, **RPM** 34

Elipses, sorrisos e sussurros
Renato J. C. Valladares, **RPM** 36

A Matemática do GPS

O que é o GPS e como funciona?

O estudo da esfera e seus elementos fica naturalmente contextualizado quando exploramos sua associação com o globo terrestre. Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários estão baseados em importantes idéias geométricas, e o estabelecimento das relações entre eles conduz a problemas geométricos relevantes. Aqui veremos a fundamentação matemática necessária para o entendimento de um moderno sistema de navegação por satélites, o GPS.

A sigla **GPS** é a abreviatura para ***G****lobal* ***P****ositioning* ***S****ystem* (sistema de posicionamento global). O sistema NAVSTAR, nome oficial dado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos ao GPS, consiste em um segmento espacial, formado por 24 satélites, um segmento de controle, formado pelas estações terrestres de gerenciamento, e um segmento do usuário. O projeto foi iniciado em 1973 pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos com propósitos militares, e logo estendido também para uso civil. Hoje em dia, com auxílio do piloto automático e do **GPS**, uma aeronave civil é capaz de percorrer distâncias transatlânticas e pousar sem a interferência do piloto com erro de alguns centímetros com o eixo da pista. O **GPS** tem se mostrado útil em diversas situações, tais como: roteiro de viagens; monitoramento de abalos sísmicos; meteorologia; localização para resgate; monitoramento de caminhões de carga.

Os satélites orbitam em torno da Terra a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, em seis órbitas estáveis e predeterminadas, com quatro satélites em cada órbita. Percorrem uma órbita completa a cada 12 horas e cada satélite tem 28° de visualização sobre a Terra. Isso assegura que todo ponto da superfície terrestre, em qualquer instante, esteja visualizado por pelo menos quatro satélites. Várias áreas da Terra são, por alguns momentos, visualizados por até dez satélites.

Todos os satélites são controlados pelas estações terrestres de gerenciamento. Uma “estação master”, com o auxílio de cinco estações de gerenciamento espalhadas pelo planeta, monitora o desempenho total do sistema, corrigindo as posições dos satélites e reprogramando o sistema, quando necessário. Após o processamento de todos esses dados, as correções e sinais de controle são transferidos de volta para os satélites.

Cada um dos satélites do **GPS** transmite por rádio um padrão fixado, que é recebido por um receptor na Terra (segmento do usuário), funcionando como um cronômetro extremamente acurado. O receptor mede a diferença entre o tempo que o padrão é recebido e o tempo que foi emitido. Essa diferença, não mais do que um décimo de segundo, permite que o receptor calcule a distância ao satélite emissor, multiplicando a velocidade do sinal (aproximadamente $2{,}99792458.10^8$ m/s – a **velocidade da luz**) pelo tempo que o sinal de rádio levou do satélite ao receptor. Essa informação localiza uma pessoa sobre uma imaginária superfície esférica com centro no satélite e raio igual à distância acima calculada.

Cada satélite é programado para emitir o que se chama **efeméride**, que informa a sua posição exata, naquele instante, em relação a um fixado sistema ortogonal de coordenadas. Tal posição é permanentemente rastreada, conferida e processada pelas estações terrestres. Com a posição do satélite e a distância acima calculada, obtém-se a equação da imaginária superfície esférica.

Coletando-se sinais emitidos por quatro satélites, o receptor determina a posição do usuário calculando-a como intersecção das quatro superfícies esféricas obtidas. A localização é dada, não em coordenadas cartesianas, mas por meio das coordenadas geográficas (latitude, longitude e a elevação).

A precisão do tempo é essencial na operação do **GPS**. Um erro de um microssegundo (10^{-6} segundos) no registro do lapso de tempo desde a transmissão até a sua recepção resulta num erro de 300 metros. Unidades receptoras do **GPS** extremamente precisas (e caras!) podem determinar sua posição a menos de um metro.

A superfície esférica em coordenadas cartesianas

Em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas em três dimensões, a distância entre os pontos $P = (x, y, z)$ e $C = (u, v, w)$ é dada pela fórmula

$d(P,C) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}$. Portanto, sendo r um número real positivo e $C = (u, v, w)$ um ponto fixado, a superfície esférica S de centro C e raio r, que é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a C é igual a r, tem equação (denominada equação reduzida de S):

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Desenvolvendo os quadrados em (1), obtemos (a chamada equação geral de S)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0 \qquad (2)$$

que é uma equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \qquad (3)$$

onde a, b, c, d são números reais.

A interseção de duas superfícies esféricas de centros distintos é vazia, ou um ponto ou uma circunferência, conforme a distância entre os seus centros é maior que, igual a ou menor que a soma dos raios. O teorema a seguir desempenha um papel importante na fundamentação matemática do funcionamento do **GPS**:

“Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares, então essa intersecção consiste em um único ponto”.

Demonstração

Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros C_1, C_2, C_3 e C_4, satisfazendo as hipóteses.

Sendo $x^2 + y^2 + z^2 + a_jx + b_jy + c_jz + d_j = 0$ as equações gerais de S_j, onde $j = 1, 2, 3, 4,$ ao subtrairmos essas equações duas a duas, obtemos equações lineares em x, y e z, uma vez que os termos x^2, y^2 e z^2 são eliminados.

Tal equação linear determina um plano que contém a correspondente intersecção. Por exemplo, subtraindo as equações de S_1 e S_2, obtém-se a equação de um plano que contém $S_1 \cap S_2$. Considerando-se os planos que contêm $S_1 \cap S_2$, $S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$, temos que, se $P = (x, y, z)$ está em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$, então (x, y, z) é solução do sistema linear

$$(*) \qquad \begin{array}{l} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{array}$$

A demonstração do teorema estará terminada se mostrarmos que o sistema (*) tem uma única solução, pois a existência de dois pontos distintos em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ acarretaria duas soluções distintas do sistema linear (*).

Sendo $C_j = (u_j, v_j, w_j)$ o centro de S_j, $j = 1, 2, 3, 4$, comparando as equações (2) e (3), temos $a_j = -2u_j$, $b_j = -2v_j$, $c_j = -2w_j$ de modo que

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 & w_2 - w_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 & w_3 - w_1 \\ u_4 - u_1 & v_4 - v_1 & w_4 - w_1 \end{vmatrix}$$

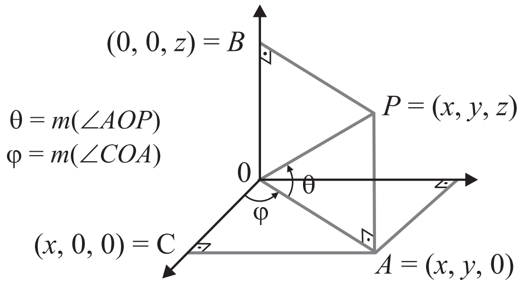
Como C_1, C_2, C_3, C_4 são não coplanares, segue que o determinante à direita é não nulo e, portanto, (*) é um sistema linear com determinante não nulo, tendo assim uma única solução.

Note que o simples fato de o sistema linear (*) ter uma única solução, o que equivale a dizer que os centros são não coplanares, não acarreta necessariamente que a intersecção das quatro superfícies esféricas consiste em um único ponto P. A hipótese $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \varnothing$ é essencial para a validade do teorema. É interessante observar que, na situação real do GPS, essa hipótese é comprovada pela existência do próprio usuário!

As coordenadas geográficas de um ponto do espaço

Fixemos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O no centro da Terra, o eixo Oz positivo apontando na direção do Pólo Norte, o plano Oxy sendo o plano do equador com o eixo Ox positivo cortando o meridiano de Greenwich e o eixo Oy positivo cortando o meridiano de longitude 90°E.

Dado um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço, sejam θ e φ as medidas dos ângulos assinalados na figura a seguir.



Quando P está sobre a superfície terrestre, os valores θ e φ acima indicados correspondem exatamente à habitual latitude e longitude do ponto P e, por isso, manteremos a mesma nomenclatura para θ e φ.

A diferença entre $OP = d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da Terra é chamada elevação (ou altitude) de $P = (x, y, z)$.

A latitude, a longitude e a elevação são chamadas *coordenadas geográficas* do ponto P. Vejamos como relacioná-las com as coordenadas cartesianas de P.

No triângulo retângulo ΔOPB da figura acima, temos:

$$\cos(90 - \theta) = \operatorname{sen}\theta = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Essa expressão atribui a θ um único valor entre 0 e 90º quando $z > 0$ e um único valor entre –90º e 0 quando $z < 0$. No primeiro caso, dizemos que a latitude de P é θ° N (norte), enquanto no segundo a latitude de P é $(-\theta)$° S (sul). Por outro lado, no triângulo retângulo ΔOAC temos

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \cos\varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Essas expressões definem um único ϕ entre 0 e 180º quando $y > 0$ e dizemos que a longitude de P é ϕ° E (leste). Quando $y < 0$, ϕ assume um único valor entre –180º e 0 e, nesse caso, a longitude de P é $(-\theta)$° W (oeste).

Como exemplo, vamos determinar as coordenadas geográficas do ponto P cujas coordenadas cartesianas são dadas, em metros, por $P = (3\sqrt{3}.10^6, -3.10^6, 6\sqrt{3}.10^6)$.

Temos $x^2 + y^2 + z^2 = 27.10^{12} + 9.10^{12} + 108.10^{12} = 144.10^{12}$ e $x^2 + y^2 = 27.10^{12} + 9.10^{12} = 36.10^{12}$.

Logo, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{6\sqrt{3}.10^6}{12.10^6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; portanto, $\theta = 60^o$.

Como $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{3.10^6}{6.10^6} = -\dfrac{1}{2}$ e $\cos\varphi = \dfrac{3\sqrt{3}.10^6}{6.10^6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, obtemos $\varphi = -30^o$. Assim, as coordenadas geográficas de P são $\theta = 60°$ N e $\varphi = 30°$ W. Supondo o raio da Terra igual a $6{,}4.10^6$ metros, temos que a elevação de P mede $12.10^6 - 6{,}4.10^6 = 5{,}6.10^6$ metros.

Uma situação real

O exemplo abaixo retrata uma situação real em que um usuário do **GPS** é detectado por quatro satélites. A tabela indica as efemérides (em metros) de cada satélite tomadas em relação ao nosso fixado sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

	x	*y*	*z*
Satélite 1	$1{,}877191188.10^6$	$-1{,}064608026.10^7$	$2{,}428036099.10^7$
Satélite 2	$1{,}098145713.10^7$	$-1{,}308719098.10^7$	$2{,}036005484.10^7$
Satélite 3	$2{,}459587359.10^7$	$-4{,}336916128.10^6$	$9{,}090267461.10^6$
Satélite 4	$3{,}855818937.10^6$	$7{,}251740720.10^6$	$2{,}527733606.10^7$

O receptor **GPS** registra os seguintes lapsos de tempo (em segundos) entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite.

Satélite 1	Satélite 2	Satélite 3	Satélite 4
0,08251731391	0,07718558331	0,06890629029	0,07815826940

Note que as informações transmitidas no sistema **GPS** envolvem, por uma questão de precisão, dez ou mais dígitos, tornando imprescindível a utilização de calculadoras ou *softwares* com capacidade de resolver sistemas lineares com coeficientes dessa ordem. Outra alternativa, abrindo mão da precisão, é trabalhar com um número menor de dígitos e utilizar a notação científica.

Multiplicando cada lapso de tempo pela velocidade da luz, $2{,}99792458.10^8$ m/s, obtemos a distância entre o receptor e cada satélite. Isso permite escrever as equações reduzidas das superfícies esféricas centradas em cada satélite e raios iguais às distâncias calculadas:

$$S_1: (x - 1{,}8.10^6)^2 + (y + 10{,}6.10^6)^2 + (z - 24{,}2.10^6)^2 = 611{,}9.10^{12}$$

$$S_2: (x - 10{,}9.10^6)^2 + (y + 13.10^6)^2 + (z - 20{,}3.10^6)^2 = 535{,}4.10^{12}$$

$$S_3: (x - 24{,}5.10^6)^2 + (y + 4{,}3.10^6)^2 + (z - 9.10^6)^2 = 426{,}7.10^{12}$$

$$S_4: (x - 3{,}8.10^6)^2 + (y - 7{,}2.10^6)^2 + (z - 25{,}2.10^6)^2 = 549.10^{12}$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos as respectivas equações gerais, e o sistema linear (*) é dado por

$$18{,}2x - 4{,}88y - 7{,}84z - 76{,}52.10^6 = 0$$

$$45{,}43x + 12{,}61y - 30{,}38z - 185{,}23.10^6 = 0$$

$$3{,}95x + 35{,}79y + 1{,}99z - 62{,}95.10^6 = 0$$

cuja única solução é $x = 0{,}5660.10^7$, $y = 0{,}0978.10^7$ e $z = 0{,}2775.10^7$.

O ponto P com essas coordenadas cartesianas pertence simultaneamente às quatro imaginárias superfícies esféricas e suas coordenadas geográficas, calculadas como no parágrafo anterior (considerando o raio da Terra medindo $6{,}378164.10^6$ metros), são

Latitude: $\theta = 26°$ N;   Longitude: $\varphi = 10°$ E;   Elevação: 919,71 metros.

Consultando um atlas geográfico ou um globo terrestre, identificamos a posição desse usuário do **GPS** como sendo a cidade de Djanet, localizada nos Montes Tássili, na fronteira entre Argélia e Líbia.

Baseado no artigo
A Matemática do GPS
Sérgio Alves, **RPM** 59

O problema do amigo oculto

Por ocasião das festas de fim de ano, um grupo de 9 pessoas resolveu planejar a célebre brincadeira do "amigo oculto (ou secreto)". Foi escrito o nome de cada pessoa em um papelzinho, e procedeu-se ao sorteio, para determinar quem iria dar presente a quem. Feito o sorteio, logo apareceu alguém que tirou a si mesmo. Sendo contra as regras da brincadeira que alguém presenteie a si mesmo, e para preservar o sigilo, foi necessário proceder a outro sorteio. No segundo sorteio, o mesmo fenômeno ocorreu, dessa vez com outra pessoa. Uma das pessoas presentes levantou a questão: "Isso vai ficar acontecendo a vida toda? Qual a probabilidade de isso acontecer?".

Na realidade, essa é uma ocorrência de um célebre problema de Análise Combinatória, o das chamadas permutações *caóticas*.

Cada sorteio define uma função f do conjunto das 9 pessoas em si mesmo. $f(x) = y$ significa que x deve presentear y. Como duas pessoas diferentes não podem tirar o mesmo amigo oculto (o sorteio é feito sem reposição), e todas as 9 pessoas serão presenteadas, f é uma *bijeção do conjunto* A das 9 pessoas sobre si mesmo, ou seja, uma permutação desse conjunto. Alguém será amigo oculto de si mesmo quando existir em A um certo x tal que $f(x) = x$. Na nomenclatura usual de funções, um tal x é chamado *ponto fixo* de f. O problema agora consiste em determinar, dentre o total das $9! = 362.880$ permutações dos elementos de A, quantas são as que têm ponto fixo — correspondentes aos sorteios fracassados — e quantas não têm ponto fixo — correspondentes aos sorteios que deram certo. Pode parecer estranho que justamente os casos que aqui "dão certo" é que são chamados, na nomenclatura clássica, de *permutações caóticas.* O motivo é que essa nomenclatura se prende à interpretação de permutações como "arrumações" dos elementos $1, \ldots, 9$ nos lugares de 1 a 9; uma permutação caótica é então uma permutação em que todo o mundo está fora de seu lugar "natural".

Antes de resolver o problema, vamos introduzir uma forma de representar permutações. Adotando o clássico símbolo $a \to b$ para designar que $f(a) = b$, e numerando as pessoas de 1 a 9, uma possível permutação é, por exemplo:

$$1 \to 8 \quad 2 \to 1 \quad 3 \to 3 \quad 4 \to 9 \quad 5 \to 7 \quad 6 \to 6 \quad 7 \to 4 \quad 8 \to 2 \quad 9 \to 5$$

Observe que podemos colocar essas informações na seguinte ordem:

$$1 \to 8 \to 2 \to 1 \qquad 3 \to 3 \qquad 4 \to 9 \to 5 \to 7 \to 4 \qquad 6 \to 6$$

Note que as pessoas 1; 8; 2; 1 formam, nessa ordem, um *ciclo* (de *tamanho* 3)*:* 1 presenteia 8, que presenteia 2, que presenteia 1. Representaremos esse ciclo por (182). O mesmo ciclo poderia ser representado também por (821) ou (218) (certo?), mas não por (128), que significaria: $1 \to 2 \to 8 \to 1$, que é diferente. Situação análoga ocorre com os elementos 4; 9; 5; 7, que formam o ciclo (4957). Os pontos fixos 3 e 6 podem ser considerados como ciclos de tamanho 1. Desse modo, essa permutação pode ser representada por: (182) (3) (4957) (6). Repare que, se trocarmos os ciclos de lugar, nada muda nas informações, de modo que a mesma permutação poderia ser representada, por exemplo, por (4957) (6) (3) (182). Já trocar a ordem das pessoas dentro dos ciclos pode alterar ou não a permutação, como vimos.

Fica claro agora que, quando procuramos as permutações que não possuem pontos fixos, estamos procurando quais as permutações que não apresentam ciclos de tamanho 1.

Para adquirir uma familiaridade com o problema, comecemos por examinar como seria o problema com números menores. Chamando de n o número de pessoas, e de K_n o número de permutações do conjunto dessas pessoas, que não têm elementos fixos, então a probabilidade de que o sorteio "dê certo" será: $p_n = K_n/n!$.

Para $n = 1$, a única permutação que existe é: $1 \to 1$, ou, na nossa notação: (1), a qual tem ponto fixo. É claro então que $K_1 = 0$ e $p_1 = 0$.

Para $n = 2$, as duas permutações são: (1) (2) e (12). Só a segunda é caótica; portanto: $K_2 = 1$ e $p_2 = 1/2$.

Para $n = 3$, existem 6 permutações: (1)(2)(3), (1)(23), (2) (13), (3) (12), (123) e (132). Dessas, só as duas últimas não têm ciclos de tamanho 1, isto é, não têm pontos fixos. Logo, $K_3 = 2$ e $p_3 = 1/3$.

É claro que não podemos contar dessa maneira para o caso $n = 9$, com um total de mais de 300 mil permutações. Vamos então fazer um raciocínio mais sutil, para esse caso. Imaginemos todas as permutações caóticas das 9 pessoas. Fixemos a atenção na pessoa de número 9. Em qualquer das 9! permutações, essa pessoa tem que estar em algum ciclo de tamanho maior que 1 (lembre-se de que não há ponto fixo numa permutação caótica!). Chamemos então de D_9 o número de permutações caóticas (das 9 pessoas) em que a pessoa 9 está num ciclo de tamanho 2, e de B_9 o número de permutações caóticas (das 9 pessoas) em que a pessoa 9 está num ciclo de tamanho maior que 2. É claro que $K_9 = B_9 + D_9$.

Se tomarmos uma permutação caótica em que 9 esteja num ciclo de tamanho maior que 2 (por exemplo, (15) (3246) (798)) e "suprimirmos" o 9, obteremos uma permutação caótica das 8 pessoas restantes (no exemplo anterior, obteríamos: (15) (3246) (78)); por outro lado, o caminho inverso – ou seja, "inserir" o 9 nessa permutação caótica das 8 primeiras pessoas, para obter uma permutação caótica das 9 originais – pode ser feito de 8 maneiras diferentes, como vemos no exemplo dado: (195)(3246)(78), ou (159)(3246)(78), ou (15)(39246)(78), ou (15)(32946)(78), ou (15)(32496)(78), ou (15)(32469)(78), ou (15)(3246)(798), ou (15)(3246)(789)). Na realidade, o processo descrito nesse "caminho inverso" consiste em substituir cada flecha $a \to b$ por $a \to 9 \to b$. No exemplo, fizemos isso, sucessivamente, com as flechas $1 \to 5$, $5 \to 1$, $3 \to 2$, $2 \to 4$, $4 \to 6$, $6 \to 3$, $7 \to 8$, $8 \to 7$, que são as oito flechas da permutação. Portanto, a conclusão é que cada permutação caótica de 8 pessoas gera, por esse processo, 8 permutações caóticas de 9 pessoas nas quais a pessoa 9 está num ciclo de tamanho maior que 2, ou seja: $B_9 = 8K_8$.

Se tomarmos agora uma permutação caótica em que 9 esteja num ciclo de tamanho igual a 2 (por exemplo, (178) (3426) (59)) e "suprimirmos" o 9, obteremos não uma permutação caótica das 8 pessoas restantes, e sim uma permutação das 8 pessoas com um único ponto fixo (no exemplo anterior, obteríamos: (178) (3426) (5)). Essa pode ser olhada como um ponto fixo (no caso, o 5) justaposto a uma permutação caótica das outras 7 pessoas. Como existem 8 candidatos a serem o ponto fixo, conclui-se que cada permutação caótica de 7 pessoas gerará, pelo processo de "acrescentar" o 9 ao ponto fixo, 8 permutações caóticas de 9 pessoas nas quais 9 está num ciclo de tamanho 2, ou seja: $B_9 = 8K_7$.

Como $K_9 = B_9 + D_9$, segue que: $K_9 = 8K_8 + 8K_7$.

O leitor pode agora repetir o mesmo raciocínio para n em vez de 9, para concluir que:

$$K_n = (n - 1)K_{n-1} + (n - 1)K_{n-2}.$$

Dividindo por $n!$ e simplificando, passa-se às probabilidades que nos interessam, obtendo:

$$p_n = (1-\frac{1}{n})p_{n-1} + \frac{1}{n}p_{n-2}\,. \qquad (*)$$

Essa é uma *fórmula* de recorrência, que permite calcular p_n, uma vez que já saibamos as probabilidades anteriores p_{n-1} e p_{n-2}. Por exemplo:

$$p_3 = (1-\frac{1}{3})p_2 + \frac{1}{3}p_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

$$p_4 = (1-\frac{1}{4})p_3 + \frac{1}{4}p_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Continuando, encontram-se:

n	p_n
1	0 = 0,00000
2	1/2 = 0,50000
3	1/3 = 0,33333
4	3/8 = 0,37500
5	11/30 = 0,36667
6	53/144 = 0,36806

e assim por diante.

Para obter uma fórmula geral, observemos que a fórmula (*) pode ser escrita como:

$p_n - p_{n-1} = (-1/n)(p_{n-1} - p_{n-2})$, ou ainda, chamando $p_n - p_{n-1}$ de d_n, como: $d_n = (-1/n)d_{n-1}$.

Observando ainda que $d_2 = p_2 - p_1 = 1/2 - 0 = 1/2$, tem-se, sucessivamente:

$$d_2 = \frac{1}{2!};\ d_3 = -\frac{1}{3!}d_2 = -\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!} = -\frac{1}{3!};\ d_4 = -\frac{1}{4}d_3 = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{4!};\ \text{etc.}$$

De um modo geral: $d_n = (-1)^n \frac{1}{n!}$.

Por fim, a relação $p_n - p_{n-1} = d_n$ acarreta:

$$p_n = (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \ldots + (p_n - p_{n-1}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

que é a fórmula geral que resolve o problema.

Observando a tabela de valores de p_n, o leitor vai reparar que esses valores crescem (cada vez menos) quando n passa de ímpar para par, e diminuem (cada vez menos) quando n passa de par para ímpar, sugerindo que p_n deva tender a se aproximar de um certo valor (entre 0,36667 e 0,36806), ora por excesso, ora por falta. Isso de fato é verdade. Esse valor é $1/e$, em que $e \approx 2{,}71828$ é a célebre base dos logaritmos naturais. Se o leitor tiver acesso a uma calculadora com a tecla e^x, poderá verificar que $1/e = e^{-1} \approx 0{,}36788$. A justificativa desse fato pode ser feita através da fórmula de Taylor para a função exponencial, estudada em Cálculo Diferencial, segundo a qual: $e^x = 1 + (x/1!) + (x^2/2!) + \ldots$.

Em suma, pode-se dizer que a probabilidade de que o sorteio do amigo oculto dê certo oscila em torno de aproximadamente 37% (conseqüentemente 63% de não dar certo), estando já bem perto desse valor a partir de 5, pessoas.

Baseado no artigo
O problema do amigo oculto
José Paulo Carneiro, **RPM** 28

Sobre o mesmo assunto, veja também
Amigo oculto, por C. G. Tamm Moreira, **RPM** 15 e
Uma pequena pérola de Euler, por Geraldo Garbi, **RPM** 50

O princípio da casa dos pombos

A *Análise Combinatória,* que poderia ser chamada de *arte de contar*, inspira, freqüentemente, temor ou desagrado aos alunos do ensino médio, às voltas com problemas mecânicos envolvendo combinações, permutações, arranjos, etc.

No entanto, trata-se de uma parte fascinante da Matemática que contém problemas de enunciado extremamente simples, mas que exigem, por vezes, para sua solução, raciocínios penetrantes e engenhosos.

Grandes matemáticos, como Euler, atacaram problemas de Combinatória. Hoje, com o rápido desenvolvimento da chamada Matemática Finita, principalmente devido ao uso dos computadores, a Combinatória cresce rapidamente, atraindo a atenção de muitos matemáticos jovens e promissores.

Um dos princípios básicos da Combinatória é o chamado *princípio da casa dos pombos*, ou ainda *princípio das gavetas de Dirichlet*, que diz simplesmente:

Se forem dados n objetos, $n \geq 2$, a serem colocados em, no máximo, $(n - 1)$ gavetas, então uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Certamente poucos duvidarão da veracidade do princípio. Para os mais céticos pode-se argumentar por redução ao absurdo. Se cada uma das gavetas contiver, no máximo, um objeto, o número total de objetos colocados nelas será, no máximo, $(n-1)$, o que é uma contradição.

Uma aplicação trivial do princípio é:

Exemplo 1

Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas terão aniversários no mesmo mês.

No entanto, o princípio da casa dos pombos se presta a aplicações mais interessantes e significativas do que essa; de outra maneira, não valeria a pena apresentá-lo.

Exemplo 2

Escolha 101 números quaisquer dentre os inteiros 1, 2,...,200. Mostre que entre os números escolhidos há dois números tais que um deles é divisível pelo outro.

Solução

Em primeiro lugar, observe que qualquer inteiro n se escreve sob a forma $n = 2^k b$, sendo k um inteiro não negativo, e b um inteiro ímpar. Por exemplo, $36 = 2^2 \times 9$; $25 = 2^0 \times 25$; $16 = 2^4 \times 1$.

Assim, se n pertence ao conjunto $\{1, 2,..., 200\}$, $n = 2^k b$ e b é um dos números ímpares 1, 3, 5,..., 199. Ora, há 100 números ímpares no conjunto $\{1, 2,..., 200\}$. Logo, quando escolhemos 101 números desse conjunto, dois deles terão suas partes ímpares iguais, pelo princípio da casa dos pombos; sejam n_1 e n_2 esses números. Então,

$$n_1 = 2^r b \quad \text{e} \quad n_2 = 2^s b.$$

Se $r < s$, então n_1 divide n_2, pois $\dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{2^s\, b}{2^r\, b} = 2^{s-r}$. Se $s < r$, então n_2 dividirá n_1, o que conclui a demonstração.

Exemplo 3

Mostre que em um conjunto de n $(n \geq 2)$ pessoas há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto (obs.: se A conhece B, B conhece A, ou seja, “conhecer” é uma relação simétrica).

Solução

Observe, em primeiro lugar, que qualquer das pessoas do conjunto conhece no mínimo zero e no máximo $(n-1)$ das outras pessoas.

Seja $P = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ o conjunto das n pessoas. Dividiremos a demonstração em dois casos.

1º caso

Todas as pessoas conhecem pelo menos uma outra pessoa do conjunto.

Nesse caso, podemos colocar as pessoas em $n - 1$ gavetas como segue:

1ª gaveta: pessoas de P que conhecem exatamente uma outra pessoa do conjunto P.

2ª gaveta: pessoas de P que conhecem exatamente duas outras pessoas do conjunto P.

$\vdots$

$(n - 1)$ª gaveta: pessoas de P que conhecem exatamente outras $(n - 1)$ pessoas do conjunto P.

Temos então n pessoas a serem distribuídas por $(n - 1)$ gavetas, e o problema está resolvido, pois, pelo princípio da casa dos pombos, duas das pessoas ocuparão a mesma gaveta.

2º caso

Uma das pessoas, que chamaremos de A_1, conhece zero pessoa (ou seja, não conhece ninguém do conjunto).

Nesse caso, nenhuma pessoa de P conhece A_1. Portanto, ninguém conhece mais do que outras $n - 2$ pessoas e novamente podemos colocar as n pessoas em $(n - 1)$ gavetas como segue:

1ª gaveta: pessoas de P que conhecem zero pessoa do conjunto P.

2ª gaveta: pessoas de P que conhecem exatamente uma outra pessoa do conjunto P.

$\vdots$

$(n - 1)$ª gaveta: pessoas de P que conhecem exatamente outras $(n - 2)$ pessoas do conjunto P.

Novamente, pelo princípio da casa dos pombos, duas das pessoas ocuparão a mesma gaveta.

O princípio da casa dos pombos pode ser reformulado da seguinte forma.

Teorema

Se m pombos ocupam n casas, então pelo menos uma casa contém $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ pombos ([x] é o maior inteiro menor do que ou igual a x).

Demonstração: Se cada casa contiver, no máximo, $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ pombos, então o número máximo de pombos será $n\left[\frac{m-1}{n}\right] \leq \frac{n(m-1)}{n} \leq m-1 < m$, uma contradição, já que temos m pombos.

Ainda outra formulação possível para o princípio da casa dos pombos é a seguinte:

Teorema

Sejam n gavetas e r um inteiro positivo dado. Coloquemos a_1 objetos na primeira gaveta, a_2 objetos na segunda, e assim sucessivamente, até a_n objetos na n-ésima gaveta. Então, se a média $(a_1 + a_2 + ... + a_n)/n$ for maior do que $r - 1$, uma das n gavetas conterá pelo menos r objetos.

Demonstração: A demonstração é bem simples. Se todos os a_i forem menores do que r, então

$$a_1 \leq r - 1;\ \ a_2 \leq r - 1;\ \ ...;\ \ a_n \leq r - 1.\ \text{ Logo,}$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq nr - n = n(r - 1),\ \text{ que implica}$$

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)/n \leq r - 1,\ \text{ o que é uma contradição.}$$

Observação

O teorema anterior pode ser apresentado sem nenhuma referência a objetos e gavetas, mas tão-somente como uma propriedade simples da média: se a média dos números naturais $a_1, a_2, ..., a_n$ for maior do que $r - 1$, então um deles deverá ser maior do que ou igual a r. O princípio da casa dos pombos pode ser deduzido desse último teorema. Com efeito, se tivermos n objetos para distribuir entre $(n - 1)$ gavetas, então a média $n/(n - 1)$ certamente será maior do que 1. Logo, fazendo $r = 2$, teremos que uma das gavetas deve conter pelo menos 2 objetos.

O teorema ainda pode ser usado para demonstrar o seguinte resultado, que pode parecer surpreendente à primeira vista.

Exemplo 4

São dados dois discos, A e B, cada um deles dividido em 200 setores iguais. Os setores dos discos são pintados de branco ou de preto. Sabe-se que no disco A há 100 setores brancos e 100 pretos, em ordem desconhecida. O número de setores brancos de B é arbitrário e desconhecido.

Coloquemos o disco A sobre o disco B de modo que cada setor de A fique exatamente sobre um setor de B (sempre que dissermos que o disco A foi colocado sobre o disco B, fica convencionado que há essa coincidência de setores).

Mostre que é possível escolher a posição de A de maneira que existam pelo menos 100 setores de A que tenham a mesma cor que os correspondentes setores de B.

Solução

Coloque A sobre B. Seja n_1 o número de setores sobrepostos com cores coincidentes.

Mantendo B fixo, gire A de um ângulo igual a um setor no sentido dos ponteiros do relógio. Seja então n_2 o número de setores sobrepostos coincidentes.

Continue com o processo, girando A sempre de um setor no sentido dos ponteiros dos relógios e obtendo n_3, n_4, ..., n_{200}.

É então verdade que o número total de coincidências é

$$n_1 + n_2 + ... + n_{200} = (200 \times 100) = 2 \times (100)^2.$$

Com efeito, fixado um setor do disco B (preto, por exemplo), como o disco A tem exatamente 100 setores pretos, haverá 100 posições em que esse setor de B terá a mesma cor que o setor correspondente de A. Assim, o número total de coincidências será o número de setores de B (200) vezes 100 (o número de setores vezes o número de coincidências por setor).

Então, pelo teorema, temos

$$(n_1 + n_2 + ... + n_{200})/ 200 = 100 > 100 - 1 \text{ (neste caso, } r = 100).$$

Logo, pelo menos um dos n_i deve ser maior ou igual a 100, ou seja, para uma das posições o número de coincidências é de pelo menos 100.

Esperamos que os exemplos apresentados tenham dado uma idéia de como aplicar o princípio da casa dos pombos. Como Matemática só se aprende fazendo, propomos a seguir alguns exercícios sobre o assunto. Se possível, tente generalizar os enunciados e demonstrar suas generalizações.

Exercícios

1. Mostre que, se do conjunto $\{1, 2,..., 2n\}$ retirarmos $(n + 1)$ números ao acaso, então:

a) um deles dividirá um outro.
b) dois dos números serão primos entre si.

2. Escolha 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor do que ou igual a $\sqrt{2}$.

3. Em uma gaveta, há 12 meias brancas e 12 meias pretas. Quantas meias devemos retirar, ao acaso, para termos certeza de obtermos um par de meias da mesma cor?

4. Chame um ponto $B = (x, y, z)$ de R^3 de bom se todas as suas três coordenadas forem inteiras. Considere nove pontos bons de R^3. Mostre que o ponto médio de algum dos segmentos que ligam esses pontos é bom.

5. Seja x um número real e n um inteiro positivo. Mostre que, entre os números x, $2x$, $3x$, ..., $(n – 1)x$, existe um cuja distância a algum inteiro é, no máximo, $1/n$.

Baseado no artigo
Princípio da casa dos pombos
João Bosco Pitombeira, **RPM** 08

Probabilidade geométrica:
os problemas dos ladrilhos, do encontro e do macarrão

Conde de Buffon, os ladrilhos e as agulhas

Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, nasceu em 7 de setembro de 1707, em Montbard, na França, e morreu em 16 de abril de 1788, em Paris.

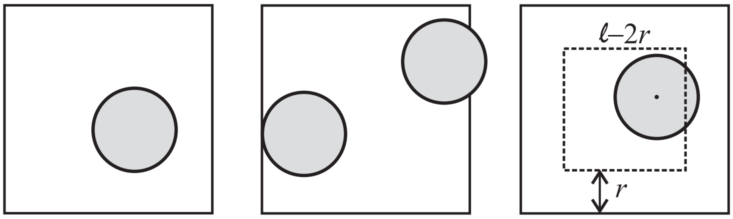
Nascido na aristocracia, estudou Medicina e Direito. Mostrou interesse pela Matemática, tendo descoberto sozinho a Fórmula do Binômio e mantido correspondência com Cramer sobre Mecânica, Geometria, Probabilidade, Teoria dos Números e Cálculo Diferencial e Integral. Mas era a Natureza a sua paixão. Dedicou-se principalmente à História Natural, tendo sido o maior responsável pelo crescimento do interesse pela História Natural na Europa, no século XVIII.

No 4º volume do seu *Suplemento à História Natural*, publicado em 1777, tem 3 de suas 35 seções dedicadas ao Cálculo de Probabilidades. Uma delas é *Sur le jeu de franc-carreau* (Sobre o jogo do ladrilho), na qual Buffon discute o jogo do ladrilho e apresenta o Problema da Agulha, que não discutiremos aqui, uma vez que sua solução exige técnicas de integração (pode ser encontrado na **RPM** 20). Foi o primeiro escrito sobre o que hoje se conhece por Probabilidade Geométrica: problemas de probabilidades que têm espaços amostrais equivalentes a pontos representados por figuras geométricas. A probabilidade de um determinado evento pode ser calculada pela razão entre medidas geométricas como comprimento, área ou volume.

O jogo do ladrilho

Era bastante jogado pelas crianças francesas no século XVIII. Uma pequena moeda de raio R é lançada ao acaso em um chão coberto por ladrilhos quadrados de lado $\ell\,(\ell > 2r)$. As crianças apostavam que a moeda cairia inteiramente dentro de um ladrilho.

Buffon notou que a probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho era a probabilidade de o centro da moeda cair dentro de um quadrado de lado $\ell - 2r$.



favorável não favorável

Essa probabilidade é a razão entre as áreas do quadrado e do ladrilho, pois a probabilidade de o centro da moeda cair em uma região é proporcional à área dessa região. Portanto, a probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho é $\dfrac{(\ell-2r)^2}{\ell^2}$.

Um exemplo atual: considerando um piso formado por quadrados de Paviflex de 30 cm de lado e um disco de raio 6 cm, a probabilidade de o disco cair inteiramente dentro de um dos ladrilhos é igual a $\dfrac{(30-12)^2}{30^2} = \dfrac{324}{900} = 0{,}36$ ou 36%.

Poderíamos também perguntar, nessa situação, qual o diâmetro d do disco que daria 60% de chances de vitória ao jogador: $\dfrac{(30-d)^2}{30^2} = 0{,}60$, o que implica $d = 6{,}77$ cm.

O problema do encontro

Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se previamente que a primeira pessoa a chegar esperará no máximo 15 minutos pela outra. Ache a probabilidade P de o encontro acontecer, admitindo que cada uma das pessoas pode chegar, de modo eqüiprovável, em qualquer instante entre 11 e 12 horas.

Podemos associar os instantes de chegada das duas pessoas, no intervalo de 60 min, entre 11 e 12 horas, a um par (x,y) de [0, 60] x [0, 60] representados por pontos em eixos ortogonais x e y em R^2. Cada ponto teria coordenadas x, y numericamente iguais à quantidade de minutos dos respectivos instantes de chegada, 11h e x min, 11h e y min , das duas pessoas.

De acordo com o enunciado, o encontro somente terá lugar se $|y-x| \leq 15$, ou seja, $y \leq x+15$ e $y \geq x-15$.

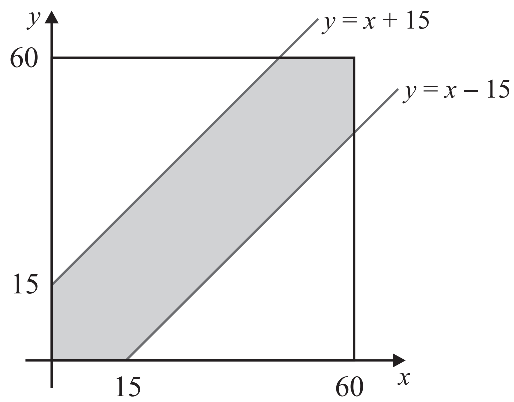
Essas duas inequações definem a região em cinza da figura.

Logo, se A é a área da região cinza, temos $P = 60^2/A$.

$$A = 60^2 - 2(45 \text{ x } 45)/2 =$$

$$60^2 - 45^2 = 105 \text{ x } 15 = 1\,575$$

P = 1 575/3600 = 0,4375 ou 43,75%.



O problema do macarrão

Em uma sala de aula distribuiu-se um espaguete para cada aluno, pedindo a cada um que partisse o espaguete, ao acaso, em três pedaços. Em seguida, pediu-se que cada um verificasse se era possível formar um triângulo com os seus três pedaços.

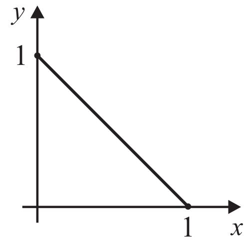
Colocou-se a pergunta: supondo que todas as possíveis divisões ocorram de forma eqüiprovável, qual a probabilidade de se obter um triângulo?

O problema pode ser enunciado do seguinte modo:

Dividindo-se aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

Tomemos um segmento de reta AB de comprimento 1. Vamos dividi-lo em três partes: uma de comprimento x, outra de comprimento y e a terceira, naturalmente, de comprimento $1 - x - y$.

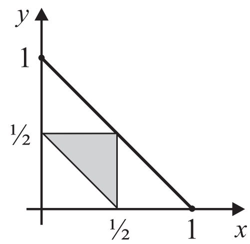
Cada forma de dividir o segmento unitário fica então associada ao par ordenado (x, y) com $x > 0$, $y > 0$ e $x + y < 1$. Isso corresponde no plano cartesiano à região triangular da figura. Portanto, cada forma de dividir um segmento em três partes está agora representada por um ponto interior ao triângulo da figura.



Entretanto, não são todas as divisões que formam triângulos. Um triângulo existe se, e somente se, cada lado for menor que a soma dos outros dois. Isso é equivalente a dizer que, em um triângulo, cada lado é menor que o seu semiperímetro, que no nosso caso é igual a 1/2. Temos, portanto,

$$x < 1/2, \ \ y < 1/2 \ \text{ e } \ 1 - x - y < 1/2 \ \text{ ou } \ x + y > 1/2.$$

Logo, a região favorável é o interior do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo inicial, que tem área igual a 1/4 da área do triângulo grande, o que nos leva a concluir que a probabilidade de que os três segmentos formem um triângulo é 0,25 ou 25%.



Baseado nos artigos
Determinação de probabilidades por métodos geométricos
Nelson Tunala, **RPM** 20

Probabilidade Geométrica
Eduardo Wagner, **RPM** 34

O problema do jogo dos discos
Roberto R. Paterlini, **RPM** 48

Alguns problemas clássicos sobre grafos

O conceito de grafo é simples, porém fértil em aplicações e problemas atraentes. Ele já foi abordado, nesta Revista, em pelo menos três ocasiões: no número 3, quando o Prof. G. de La Penha descreveu o problema das pontes de Königsberg, no número 10 (implicitamente), quando o Prof. J. B. Pitombeira tratou da questão de determinar o número de regiões em que n retas em posição geral decompõem o plano e, no número 11, quando este mesmo autor estudou o problema de ligar água, luz e telefone em três casas.

Creio que nossos leitores apreciarão uma análise do problema das pontes. E, para aproveitar o embalo, ofereceremos soluções diferentes para os outros dois problemas acima mencionados. É sempre instrutivo ter diversas alternativas para resolver questões interessantes.

As setes pontes de Königsberg

Imaginemos um rio, com duas margens A e B. No rio, duas ilhas C e D. A ilha C está ligada a cada uma das margens por duas pontes. Em cada margem, há também uma ponte para a ilha D. A sétima ponte liga as ilhas entre si.

O *problema das sete pontes de Königsberg* consiste em achar um caminho, ao longo do qual um pedestre, partindo de uma das margens ou de qualquer das ilhas, percorra todas as pontes, sem passar mais de uma vez por qualquer uma delas.

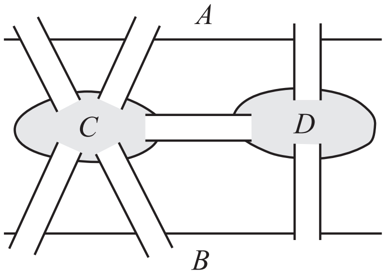


figura 1

Este problema foi resolvido, em 1735, pelo matemático suíço Leonhard Euler. Ele fez a observação fundamental de que, para efeito da questão proposta, as margens e as ilhas são como se fossem pontos *A*, *B*, *C*, *D*. As pontes são como arcos que têm esses pontos como extremidades. Tudo se resume a analisar o diagrama ao lado, onde os arcos ligam os pontos, de acordo com a disposição das pontes dada no enunciado do problema.

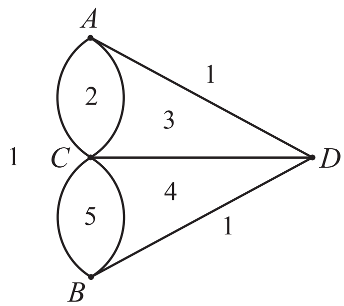


figura 2

O desenho da figura 2, é provavelmente, o primeiro exemplo de um grafo a ocorrer como modelo matemático para resolver um problema, que agora se exprime assim: partindo de um dos vértices *A*, *B*, *C*, ou *D*, achar um caminho que percorra todo o grafo sem passar mais de uma vez pelo mesmo arco.

De um modo geral, um grafo é isto: um conjunto finito de pontos, chamados os *vértices* do grafo, e um conjunto finito de arcos, chamados as *arestas* do grafo. As extremidades de cada aresta devem ser vértices. Além disso, duas arestas quaisquer do grafo não podem ter pontos interiores em comum: ou são disjuntas ou se tocam apenas numa ou em duas das extremidades.

Euler chamou atenção para uma noção muito simples, porém crucial, que é a ordem de um vértice do grafo. A *ordem* de um vértice é o número de arcos que emanam dele. Por exemplo, no grafo das pontes de Königsberg, o vértice *C* tem ordem 5, enquanto os demais vértices *A*, *B* e *D* têm todos ordem 3.

Um *caminho* num grafo é uma seqüência finita de vértices $\lambda = (A_0, A_1, ..., Ap)$ tal que, para cada $i = 1, ..., p$, A_{i-1} e A_i são extremidades de uma aresta (juntamente com a escolha da aresta ligando A_{i-1} e A_i, já que pode haver mais de uma aresta). Diz-se que o caminho parte do vértice A_0, percorre as arestas escolhidas e termina no vértice A_p.

Um caminho chama-se *unicursal* quando não percorre a mesma aresta mais de uma vez. Um grafo G chama-se *unicursal* quando existe um caminho unicursal que percorre todas as arestas de G. Observe-se que um caminho unicursal pode passar várias vezes pelo mesmo vértice.

Toda vez que um caminho unicursal chegar a um vértice, deve sair dele por um arco diferente daquele por onde chegou. (A menos que esse vértice seja o fim do caminho.) Portanto, se um caminho unicursal percorrer todas as arestas do grafo, os vértices desse grafo, com exceção do início e do fim do caminho, devem ter todos um número par de arestas emanando deles, isto é, devem ter ordem par. O vértice que serviu de início e o que serviu de fim para o caminho têm ordem ímpar. Se o início e o fim do caminho coincidirem (isto é, se o caminho for fechado), então todos os vértices do grafo, sem exceção, têm ordem par.

Concluímos então que se *um grafo é unicursal, ou todos os seus vértices têm ordem par ou exatamente dois vértices têm ordem ímpar. No primeiro caso, todo caminho unicursal é fechado. No segundo caso, um caminho unicursal deve começar num dos vértices de ordem ímpar e terminar no outro.*

Segue-se, daí, que o grafo da figura 2 não é unicursal, pois seus quatro vértices têm todos ordem ímpar. *Fica, então, resolvido o problemas das sete pontes: é impossível percorrê-las todas, sem passar duas vezes por alguma ponte.*

Observação: A cidade de Königsberg ficava na Prússia, região do leste da Alemanha. Hoje, ela se chama Kaliningrado, pertence à Rússia e já é possível percorrer todas as suas pontes sem passar mais de uma vez por cada uma delas. É que foi construída uma nova ponte. A bem da verdade, devemos esclarecer também que, de fato, Euler não menciona a ilha *D*. No seu mapa há uma península *D*, a partir da qual o rio Pregel se bifurca, depois de passar pela ilha *C* (que se chama Kneiphof). Mas é claro que o problema fica bem mais fácil de enunciar se substituirmos a península por uma ilha, o que não faz diferença alguma do nosso ponto de vista.

Voltando às antigas pontes de Königsberg, podemos trocar o ponto de vista terrestre pelo aquático e indagar: *seria possível a um barqueiro (ou nadador) no rio passar por baixo das sete pontes sem passar mais de uma vez sob nenhuma delas?* Esta questão, ao que parece, nunca foi considerada por Euler. O leitor interessado pode, entretanto, tomar seu lápis e papel. Se tiver um pouco de paciência vai conseguir uma rota adequada para o barqueiro, como por exemplo a da figura 3.

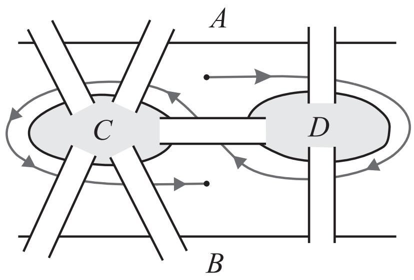


figura 3

Tendo sido bem-sucedido em sua tentativa, o leitor pode indagar se foi apenas uma questão de sorte ou se existe uma razão matemática que permita ao barqueiro cruzar as pontes, do mesmo modo que proíbe o pedestre de percorrê-las. Seria possível reformular este segundo problema em termos de grafos, como fizemos com o primeiro?

Existe sim, a razão matemática. É, sim, possível enquadrar o barqueiro no contexto dos grafos. Vejamos como.

Um grafo no plano divide esse plano em *regiões*. Por exemplo, o grafo da figura 2 determina cinco regiões. A região exterior, que naquela figura indicamos com o algarismo 1, e mais quatro regiões limitadas, as quais indicamos com os algarismos 2, 3, 4 e 5 na figura.

Usando essas regiões, pode-se, a partir de um grafo G, construir um novo grafo G^*, chamado o *dual* de G. Os vértices de G^* são tantos quantas são as regiões de G. Dois vértices do novo grafo G^* estarão ligados por tantas arestas quantas forem as arestas adjacentes às regiões correspondentes.

Por exemplo, seja G o grafo da figura 2. Para formar o grafo dual G^* tomamos cinco vértices, correspondentes às cinco regiões 1, 2, 3, 4 e 5. A região 1, no grafo G, é adjacente a todas as outras. Logo devemos traçar arestas em G^* ligando o vértice 1 a todos os outros quatro. As regiões, 2 e 3, 3 e 4, 4 e 5 são adjacentes. Então devem existir arestas em G^* ligando os vértices com esses números. Por outro lado, não há outros pares de regiões adjacentes. Logo não há outras arestas em G^*. O grafo G^*, dual daquele na figura 2, está desenhado na figura 4.

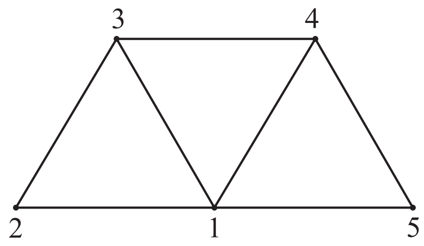


figura 4

Note-se que, no grafo G^*, apenas dois vértices (3 e 4) têm ordem ímpar (ambos têm ordem 3). Os vértices 2 e 5 têm ordem 2 e o vértice 1 tem ordem 4. Portanto G^* cumpre a condição necessária para ser unicursal. Pode-se demonstrar que essa condição é também suficiente para um grafo conexo. Mais ainda, um caminho unicursal no grafo G^* deve começar num dos vértices 3 ou 4 e terminar no outro. Isso justifica matematicamente por que um barqueiro pode passar por baixo das sete pontes de Königsberg sem repetir nenhuma delas, mas um pedestre não pode fazer seu passeio unicursal ao longo dessas pontes. É que o grafo G não é unicursal, enquanto seu dual G^* é. Além disso, o percurso do barqueiro deve começar ao lado da ponte que liga as duas ilhas e terminar do outro lado dessa mesma ponte.

De um modo geral, juntamente com o problema de percorrer todas as arestas de um grafo plano, pode-se sempre considerar o problema dual de, partindo de uma das regiões por ele determinadas, descrever um caminho que corte todas as arestas uma única vez. Isto corresponde a indagar se o grafo dual é unicursal.

O leitor é convidado a desenhar diferentes grafos e examinar, para cada um deles, a possibilidade de traçar um caminho unicursal, no grafo ou no seu dual.

Em quantas regiões n retas dividem o plano?

A pergunta formulada acima não admite uma resposta única. Com 3 retas distintas, por exemplo, podemos dividir o plano em 4, 6 ou 7 regiões, conforme se vê na figura 5.

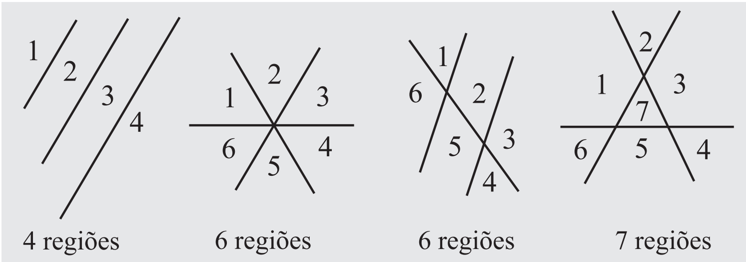


figura 5

A formulação correta do problema, para que ele tenha uma resposta única, é a seguinte: *qual é o número máximo de regiões em que n retas dividem o plano?* Evidentemente, o número máximo de regiões ocorre quando essas retas estão situadas de modo a terem o número máximo possível de pontos de intersecção. Esse número máximo acontece quando:

1º) Entre as retas dadas não há paralelas;

2º) Nenhum ponto é a intersecção de mais de duas retas dadas.

Neste caso, diz-se que as n retas dadas estão em *posição geral*.

Dadas n retas em posição geral, para determinar o número R de regiões em que elas dividem o plano, procederemos da seguinte maneira. Em primeiro lugar, traçamos um círculo tão grande que contenha em seu interior todos os pontos de intersecção das n retas. Os requisitos 1º) e 2º) acima asseguram que, para cada duas das n retas dadas, há um ponto de intersecção e vice-versa. Logo, o número dos pontos de intersecção, todos situados no interior do nosso círculo, é $\binom{n}{2} = n(n-1)/2.$

Na figura 6, temos quatro retas em posição geral. Seus 6 pontos de intersecção estão no interior do círculo ali traçado.

Agora consideremos o grafo plano G, obtido quando desprezamos as partes das retas que ficam no exterior do círculo que traçamos.

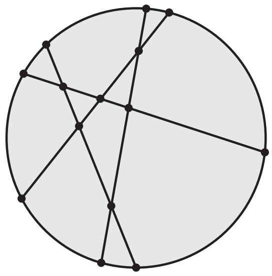


figura 6

Os vértices de G são as intersecções das n retas duas a duas e mais os $2n$ pontos em que essas n retas intersectam a circunferência: ao todo, temos $V = 2n + n(n-1)/2$ vértices no grafo G.

As arestas de G são os $2n$ arcos de círculo correspondentes e mais os segmentos de reta interiores ao círculo. Sobre cada uma das n retas há $n + 1$ vértices, a saber: os $n - 1$ pontos de intersecção dessa reta com as $n - 1$ outras e os 2 pontos em que ela corta a circunferência. Logo, temos n segmentos, isto é, n arestas do grafo G, sobre cada uma das n retas dadas. Ao todo, são n^2 arestas de G interiores ao círculo, com o total de $A = n^2 + 2n$ arestas em G.

O número R de regiões em que as n retas dadas dividem o plano é igual ao número de regiões determinadas pelo grafo G menos uma, que é a região exterior ao círculo. A fórmula de Euler diz que se um grafo com V vértices e A arestas decompõe o plano em F regiões, tem-se $V - A + F = 2$.

Pela fórmula de Euler temos, portanto, $V - A + R = 1$, ou seja, $2n + n(n-1)/2 - n^2 - 2n + R = 1$, donde $R = 1 + n(n+1)/2$.

Equivalentemente: $R = 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dbinom{n}{0} + \dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2}$.

Água, luz e telefone

Um problema muito popular, desde meus tempos de ginásio, consiste em propor que se ligue, em três casas, água, luz e telefone, a partir de 3 centrais diferentes. Casas, centrais, e ligações estão no mesmo plano. Não se permite que as ligações se cruzem.

Não é possível fazer isto. Uma demonstração dessa impossibilidade foi apresentada no número 11 da **RPM**, usando a fórmula de Euler.

No que se segue, daremos uma demonstração diferente do mesmo resultado, sem fazer uso daquela fórmula.

Representaremos as centrais de água, luz e telefone pelas letras A, L, T e as três casas por pontos X, Y e Z. Comecemos ligando água e luz às casas X e Y. Obteremos um "quadrilátero" $XAYL$, cujos lados podem ser curvilíneos.

A central telefônica T pode estar dentro ou fora deste quadrilátero. Isto não fará diferença alguma mas, para fixar as idéias, suponhamos que esteja fora, como na figura 7.

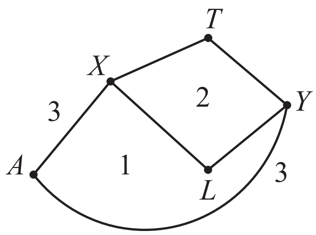


figura 7

Liguemos o telefone nas casas X e Y. Ficamos com dois "quadriláteros" adjacentes $XAYL$ e $XLYT$, os quais decompõem o plano em três regiões, que designamos por 1, 2 e 3. (As regiões 1 e 2 são interiores aos quadriláteros, enquanto a região 3 é exterior.)

A terceira casa, Z, deverá estar numa dessas três regiões. Examinemos cada uma das possibilidades. Se Z estiver na região 1, poderemos ligar-lhe água e luz porém não telefone. Se estiver na região 2, ficará com luz e telefone, mas sem água. Finalmente, se Z estiver na região 3, poderá ter água e telefone, mas não terá luz. Portanto, as nove ligações não podem ser todas feitas sem que se cruzem, e o problema está resolvido.

Baseado no artigo *Alguns problemas clássicos sobre grafos*
Elon Lages Lima, **RPM** 12

Série harmônica

Introdução

O objetivo deste artigo é o de fazer uma apresentação simples da chamada *série harmônica*, que possui propriedades muito interessantes.

Um pouco de História

As séries infinitas são conhecidas desde a antiguidade, e a primeira a ocorrer na História da Matemática é uma série geométrica de razão 1/4, que intervém no cálculo da área da parábola feito por Arquimedes.

Depois da ocorrência de uma série geométrica num trabalho de Arquimedes, as séries infinitas só voltaram a aparecer na Matemática cerca de 1500 anos mais tarde, no século XIV. Nessa época havia um grupo de matemáticos na Universidade de Oxford que estudava a cinemática, ou fenômeno do movimento; e, ao que parece, foi esse estudo que levou à reconsideração das séries infinitas.

Ao lado dos pesquisadores de Oxford, havia também pesquisadores em outros centros. Na Universidade de Paris, em particular, havia um professor chamado *Nicole Oresme* (1325-1382), um destacado intelectual em vários ramos do conhecimento, como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais. Além de professor universitário, Oresme era conselheiro do rei, principalmente na área de finanças públicas; e nessa função revelou-se um homem de larga visão, recomendando medidas monetárias que tiveram grande sucesso na prática. Ao lado de tudo isso, Oresme foi também bispo de Lisieux.

Um dos trabalhos mais notáveis de Oresme sobre as séries infinitas está ligado à série harmônica.

Antes, porém, de falar da série harmônica, temos de explicar o que significa dizer que uma série é convergente ou divergente.

A idéia de "série infinita" aparece na Matemática quando imaginamos a operação de somar parcelas sucessivamente sem que essa operação termine após um número finito de parcelas somadas. Deixando de lado qualquer preocupação com a rigorização desse conceito, vamos examinar algumas séries infinitas simples. Por exemplo,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots$$

Trata-se de uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{2}$ e a soma de seus termos é dada por $S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

Séries que têm soma finita são chamadas de *séries convergentes*. Mas é fácil imaginar séries que não sejam convergentes. Por exemplo, é claro que as séries

$$1+2+3+4+5+\cdots, \quad 2+4+6+8+\cdots, \quad 1+2+1+2+1+2...,$$

não são convergentes; elas são ditas *divergentes*. Um exemplo menos trivial de série divergente é dado por $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\dots+\frac{n}{n+1}+\dots$. Para ver que essa série diverge, basta notar que todos os seus termos, a partir do segundo, são maiores do que 1/2.

A série harmônica

A série harmônica é uma série muito simples, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$$

Como se vê, os termos da série harmônica estão decrescendo para zero. Mas será que, quando o termo geral de uma série tende a zero, ela converge? Se for assim — e à primeira vista parece que é —, então a série harmônica deve ser convergente.

Vamos investigar. Após a soma de um grande número de termos da série harmônica, quando chegarmos a $n = 10^{20}$, $n = 10^{30}$, $n = 10^{100}$, etc., estaremos somando tão pouco que teremos a impressão de que a soma de todos os termos da série infinita realmente é um número finito. Aliás, hoje em dia, com a ajuda do computador, podemos até fazer cálculos experimentais interessantes.

Vamos supor que fôssemos capazes de somar cada termo da série em um segundo de tempo. Como um ano tem aproximadamente

$$365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60 = 31\,557\,600 \text{ segundos,}$$

nesse período de tempo seríamos capazes de somar a série até $n = 31\,557\,600$, obtendo para a soma um valor pouco superior a 17; em 10 anos a soma chegaria a pouco mais de 20; em 100 anos, a pouco mais de 22. Como se vê, somas parciais de termos da série harmônica jamais nos levariam a suspeitar que ela diverge. Pelo contrário, essas somas só nos levam a pensar que a série seja convergente.

Isso, todavia, é falso! Embora surpreendente, esse resultado pode ser facilmente demonstrado. Para isso agrupamos os termos da série assim:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$
$$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots\frac{1}{16})+\ldots$$

Observe agora que a soma dentro de cada parêntese é sempre maior do que 1/2. Veja:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2};$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2};$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2},$$

e assim por diante.

Então, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty,$ o que prova que a série é mesmo divergente.

A demonstração de que a série harmônica diverge, feita pela primeira vez por Oresme, mostra como é decisivo o papel do raciocínio lógico para estabelecer uma verdade que jamais seria descoberta de outra maneira. De fato, como vimos acima, mesmo somando os termos da série durante um século (se isso fosse possível), não chegaríamos a um resultado que nos desse qualquer indício de que a série seria divergente...

Para terminar, vamos fazer mais um exercício de imaginação. Hoje em dia temos computadores muito rápidos, e a tecnologia está produzindo máquinas cada vez mais rápidas. Mas isso tem um limite, pois, como sabemos, nenhum sinal físico pode ser transmitido com velocidade superior à da luz. Portanto, nenhum computador poderá efetuar uma soma em tempo inferior a 10^{-23} segundos, que é o tempo gasto pela luz para percorrer uma distância igual ao diâmetro de um elétron. Pois bem, com tal computador, em um ano, mil anos e um bilhão de anos, respectivamente, o número de termos que poderíamos somar seria

$$315576 \times 10^{25}, \qquad 315576 \times 10^{28} \quad \text{e} \quad 315576 \times 10^{34}.$$

Veja os resultados aproximados que obteríamos para a soma da série harmônica, em cada um desses casos, respectivamente:

$$70{,}804; \quad 77{,}718 \quad \text{e} \quad 91{,}5273\,.$$

Imagine, finalmente, que esse computador estivesse ligado desde a origem do universo, há 16 bilhões de anos. Ele estaria hoje obtendo o valor aproximado de $94{,}2999$ para a soma da série harmônica, um número ainda muito pequeno... O leitor tem toda razão em perguntar:

– Como se chega ao número $94{,}2999$, se o (idealizado) computador mais rápido que se possa construir deveria ficar ligado durante 16 bilhões de anos?

Sim, não há como fazer essa soma diretamente, mas existem métodos que permitem substituir a soma S_n dos n primeiros termos da série por uma expressão matemática que aproxima S_n e que pode ser calculada numericamente, o que, no entanto, requer conhecimentos de Cálculo Integral.

Alergia pelo número 7

Imaginem um matemático alérgico ao número 7 que decidisse eliminar da série harmônica todas as frações que contivessem o algarismo 7. A nova série ficaria assim:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\ldots$$

Como todos os demais algarismos poderão ser usados, salvo, tão-somente, o 7, era de se esperar que a nova série também divergisse. Mas, vejam só, a série acima converge e a sua soma não chega a oitenta! Só provando para acreditar:

* Cada uma das 8 primeiras frações, de $\frac{1}{1}$ até $\frac{1}{9}$, é menor ou igual a 1. A soma dessas frações é menor do que 8.

* Cada uma das 8 x 9 frações seguintes, de $\frac{1}{10}$ até $\frac{1}{99}$, é menor ou igual a $\frac{1}{10}$. A soma dessas frações é menor do que $8\times 9\times\frac{1}{10}$.

* Cada uma das 8 x 9 x 9 frações seguintes, de $\frac{1}{100}$ até $\frac{1}{999}$, é menor ou igual a $\frac{1}{100}$. A soma dessas frações é menor do que $8\times 9^2\times\frac{1}{10^2}$.

E assim, sucessivamente, a soma dos termos da série será menor do que $8+\frac{8\times 9}{10}+\frac{8\times 9^2}{10^2}+\frac{8\times 9^3}{10^3}+\ldots+\frac{8}{1-\frac{9}{10}}=80.$

Não é incrível?

Baseado nos artigos
As séries infinitas
Geraldo Ávila, **RPM** 30

Alergia pelo número 7
Renate Watanabe, **RPM** 31

O que tem mais: racionais ou naturais?

Cantor e a Teoria dos Conjuntos

A reforma do ensino da Matemática de 50 anos atrás introduziu a utilização de conjuntos no ensino básico, mas apenas a parte referente à notação e à linguagem de conjuntos, nada de substancial sobre a verdadeira “Teoria dos Conjuntos”. Em conseqüência, não apenas os alunos, mas também muitos professores são pouco informados sobre a importância desse ramo de estudos, daí a razão de tratarmos aqui de alguns poucos aspectos interessantes dessa disciplina.

O criador da Teoria dos Conjuntos foi o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), que foi professor na Universidade de Halle, onde iniciou uma série de pesquisas sobre as chamadas séries trigonométricas. Essas séries ocuparam a atenção dos mais eminentes matemáticos durante todo o século XIX; e seu estudo, pelos muitos desdobramentos e ramificações que teve, foi, em verdade, o impulso mais significativo para o progresso da Análise Matemática durante a maior parte do século. Através de suas investigações nesse domínio, Cantor foi levado a estudar os conjuntos de pontos de descontinuidade das funções que considerava, logo chegando a estudar conjuntos infinitos de pontos de descontinuidade. Daí ele passou naturalmente a estudar conjuntos em si, sem referência a funções. Assim nascia a Teoria dos Conjuntos.

Conjuntos enumeráveis

Um dos primeiros fatos surpreendentes que surgem na consideração de conjuntos infinitos diz respeito à possibilidade de haver uma equivalência entre um conjunto e um seu subconjunto próprio. Isso pode ser visto facilmente através da seguinte correspondência (restrita a números positivos, por simplicidade):

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & \dots \end{array}$$

Existe aqui uma correspondência biunívoca entre elementos dos dois conjuntos ($n \leftrightarrow 2n$) de tal sorte que a cada elemento de cada conjunto corresponde um único elemento do outro. Segundo Cantor, dois conjuntos são *equivalentes*, ou têm a mesma *cardinalidade*, quando é possível estabelecer entre eles uma tal correspondência. No caso de conjuntos finitos, serem equivalentes corresponde a terem o mesmo número de elementos, de sorte que o conceito de equivalência ou cardinalidade é uma extensão, a conjuntos infinitos, da noção de "número de elementos de um conjunto".

Cantor passou a chamar de *enumerável* a todo conjunto que tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais 1, 2, 3, 4, ...Vamos mostrar que os números racionais também formam um conjunto enumerável. Por simplicidade restringimo-nos aos racionais positivos, que distribuímos em vários grupos, cada grupo contendo as frações cujos numerador e denominador têm a mesma soma; por exemplo, $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}$ é o grupo de todas as frações cujos termos têm soma 5. Vamos fazer uma lista de todos esses grupos, começando com aquele cuja soma dos termos das frações é 2 (e que só contém a fração 1/1); depois o grupo das frações 1/2 e 2/1, cuja soma dos termos é 3; e assim por diante, sucessivamente. Ao mesmo tempo, riscamos as frações que representam o mesmo número já representado por frações que apareceram antes. Eis a lista:

$$\frac{1}{1}; \qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{1}; \qquad \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}; \qquad \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1};$$

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1};$$
$$\frac{1}{7}, \frac{2}{6}, \frac{3}{5}, \frac{4}{4}, \frac{5}{3}, \frac{6}{2}, \frac{7}{1};$$
$$\frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{6}{3}, \frac{7}{2}, \frac{8}{1};$$

É claro que esse procedimento resulta numa lista de todos os números racionais. Basta agora enumerá-los na ordem em que aparecem, isto é,

$$\begin{array}{llll} r_1 = 1, & r_2 = 1/2, & r_3 = 2, & r_4 = 1/3, \\ r_5 = 3, & r_6 = 1/4, & r_7 = 2/3, & r_8 = 3/2, \\ r_9 = 4, & r_{10} = 1/5, & r_{11} = 5, & r_{12} = 1/6, \quad \text{etc.} \end{array}$$

Dessa maneira obtemos uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números racionais (positivos) e dos números naturais, que também podemos expressar assim:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 1/2 & 2 & 1/3 & 3 & 1/4 & 2/3 & 3/2 & 4 & 1/5 & \ldots \end{array}$$

Isso mostra que os números racionais formam, de fato, um conjunto enumerável.

Conjuntos não-enumeráveis

Se todos os conjuntos infinitos fossem enumeráveis, tendo, pois, a mesma cardinalidade, esse conceito não teria utilidade. O primeiro grande mérito de Cantor foi a descoberta de que os números reais não são enumeráveis. O leitor interessado encontra a demonstração desse fato, por exemplo, na **RPM** 4. Com essa descoberta, Cantor estabeleceu um fato muito surpreendente, qual seja, o de que existem pelo menos dois tipos diferentes de infinito: o do conjunto dos números naturais e o do conjunto dos números reais. Cantor provou outro fato não menos perturbador: o de que, dado um conjunto qualquer, é sempre possível construir outro conjunto "maior ainda", isto é, cuja cardinalidade é "maior" que a do conjunto dado. Ele obteve assim um modo de construir toda uma infinidade de conjuntos infinitos com cardinalidades diferentes, e ordenou os conjuntos infinitos de acordo com sua cardinalidade, do mesmo modo que se ordenam os conjuntos finitos de acordo com o número de seus elementos, ou seja, sua cardinalidade. Surgia assim a teoria dos *números transfinitos*.

Conseqüências do trabalho de Cantor

As descobertas de Cantor tiveram grande impacto no mundo matemático de fins do século passado e começo do presente século. Para bem apreciar o que então acontecia, é bom lembrar que desde o início do século XIX era crescente a preocupação com o rigor, primeiro na Análise Matemática, porém mais tarde também na Geometria, depois das descobertas das geometrias não euclidianas. A partir de 1870, quando Cantor iniciava sua vida profissional, as atividades de pesquisa na área de axiomatização e fundamentos intensificavam-se rapidamente. E a Teoria dos Conjuntos, que então se desenvolvia, revelou-se muito adequada para ser o fundamento de toda a Matemática.

Há uma outra razão por que a Teoria dos Conjuntos é importante em Matemática, fora da área dos fundamentos propriamente dita. É que desde os tempos de Cantor muitas disciplinas matemáticas novas surgiram e se desenvolveram extensamente, como a Topologia, a Álgebra Abstrata, a Teoria da Medida e Integração, a Teoria da Probabilidade, a Análise Funcional e outras mais. E em todas essas disciplinas – que, ao contrário de estanques e separadas, no mais das vezes se entrelaçam através de fronteiras indistinguíveis – a linguagem, a notação e os resultados da Teoria dos Conjuntos se revelaram instrumento natural de trabalho, a ponto de ser impossível conceber o desenvolvimento de toda essa Matemática sem a Teoria dos Conjuntos. Tentando uma analogia, diríamos que a Teoria dos Conjuntos é aqui tão necessária e indispensável como a notação literal é necessária e indispensável à Álgebra Elementar.

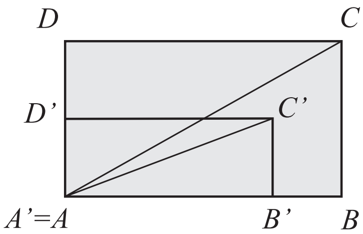
Para concluir queremos deixar claro que a Teoria dos Conjuntos é uma disciplina cuja importância é difícil exagerar, não só para a Matemática, mas para o conhecimento humano de um modo geral. Ela não é importante, isto sim, para o ensino básico da Matemática, onde somente um pouco de notação e linguagem de conjuntos é suficiente.

Baseado no artigo
A Teoria dos Conjuntos e o ensino de Matemática
Geraldo Ávila, **RPM** 4

Problemas

1. Uma calculadora científica com diversos circuitos danificados só está fazendo adições, subtrações, multiplicações, divisões e calculando as funções trigonométricas seno e cosseno e suas inversas. Como podemos obter a raiz quadrada de um número positivo com essa calculadora usando um número finito de operações?

2. (O teste da diagonal) Dois retângulos *ABCD* e *A'B'C'D'* são sobrepostos como na figura. Prove que os retângulos são semelhantes se e só se as diagonais *AC* e *A'C'* estão na mesma reta. Logo, para verificar se dois retângulos são semelhantes, basta colocá-los como na figura e verificar se as diagonais *AC* e *A'C'* estão na mesma reta.



3. Sabe-se que o número de 7 algarismos 21358*ab*, em que *a* é o dígito das dezenas e *b* o das unidades, é divisível por 99. Determine *a* e *b*.

4. As medidas dos lados de um triângulo retângulo (numa mesma unidade) podem ser números primos?

5. Um trem atravessa uma ponte de 171 m em 27 segundos. Determine a velocidade e o comprimento do comboio se o tempo de passar um pedestre, que anda em sentido contrário, com a velocidade de 1 m/s, é de 9 segundos.

6. Dados dois espelhos planos paralelos, considere dois pontos *A* e *B* entre eles. Determine a trajetória que deve percorrer um raio de luz partindo de *A* para atingir o ponto *B* após ter sido refletido 3 vezes num espelho e 2 vezes no outro. Admite-se que o ângulo de incidência seja igual ao de reflexão.

7. Prove que todo triângulo com duas bissetrizes iguais é isósceles.

8. Prove que vale a seguinte desigualdade

$$\log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 5 > 4.$$

9. Sabe-se que cada uma dentre as pessoas *A*, *B* e *C* diz a verdade em qualquer situação, com probabilidade 1/3. Suponha que *A* faça uma afirmação e que *C* diz que *B* diz que *A* falou a verdade. Qual a probabilidade de que *A* realmente tenha falado a verdade?

10. Prove que

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{14\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}\cdot\cos\frac{14\pi}{9}=-\frac{3}{4}.$$

11. a) Dada uma equação do segundo grau, com coeficientes inteiros, mostre que o seu discriminante não pode ser igual a 23.

b) Para quantos valores reais do número a à equação $x^2 + ax + 6a = 0$ possui somente raízes inteiras?

12. Prove que, se $\text{sen}(2x + y) = 5\,\text{sen}\,y$, então $\text{tg}(x+y)=\frac{3}{2}\,\text{tg}\,x.$

13. Pelo ponto médio *M* do lado *BC* de um quadrilátero *ABCD*, traçar a reta que divide esse quadrilátero em duas partes de áreas iguais.

14. Uma urna contém *n* bolas numeradas de 1 a *n*. Bolas são retiradas dessa urna sucessivamente, sem reposição, até que pela primeira vez apareça um número maior que todos os anteriores. Caso isso não aconteça, o processo prossegue até que se esgotem as bolas da urna. Para $k = 2, ..., n$, determine a probabilidade de que o processo pare na *k*-ésima retirada.

15. Numa circunferência de raio *R* fixe dois pontos *B* e *C*. Mostre que o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos *ABC*, onde *A* é um ponto qualquer dessa circunferência, é uma outra circunferência de raio *R*/3 que corta *BC* em três segmentos congruentes.

16. Determine as soluções inteiras e positivas da equação.

$$x^3 - y^3 = 602$$

(Sugestão: fatore $x^3 - y^3$ e 602).

17. Se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente iguais e dois ângulos respectivamente suplementares, mostre que os lados opostos aos ângulos iguais são proporcionais aos lados opostos aos ângulos suplementares.

18. Considere o conjunto *A* de todas as combinações simples de 10 elementos em grupos de 5. Duas combinações distintas são escolhidas ao acaso no conjunto *A*. Determine as probabilidades de que elas:

a) não tenham nenhum elemento em comum;

b) tenham exatamente 4 elementos em comum.

19. Num icosaedro regular de aresta *a*, cada vértice está ligado a 5 outros vértices formando uma pirâmide pentagonal. Calcule a altura dessa pirâmide.

20. Dados dois pontos A e B do plano e uma constante $\frac{m}{n} > 0$, determinar o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$.

21. Encontre todos os números naturais de dois dígitos tais que sua soma com o número formado pelos mesmos dígitos em ordem contrária resulta um quadrado perfeito.

22. Considere em um plano as retas paralelas $a,\ b,\ c$ distintas duas a duas. Mostre que existem triângulos equiláteros cujos vértices A, B, C são pontos das retas a, b, c respectivamente.

23. Use um argumento combinatório para determinar o valor de

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

sendo *n* um inteiro maior ou igual a 1.

24. O produto de 3 números pares e consecutivos é 88 XXXXX 2, onde cada X representa um algarismo que falta. Determine esses 5 algarismos.

25. Mostre que, quaisquer que sejam os números inteiros *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, a equação

$$x^7 + 2x^6 + 3x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

não pode ter todas as raízes reais.

26. Supondo que o polinômio

$$P(x) = x^{100} - 600x^{99} + a_{98}x^{98} + \ldots + a_1x + a_0$$

tenha 100 raízes reais e que $P(7) > 1$, mostre que existe pelo menos uma raiz maior do que 7.

27. Prove que um pentágono com os cinco lados congruentes e três ângulos congruentes é regular.

28. Mostre que, se a, b, c são números inteiros ímpares, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes racionais.

29. Suponha que cada ponto de um plano seja pintado de uma cor escolhida entre três cores dadas. Prove que existem dois pontos de mesma cor cuja distância é k, sendo $k > 0$ um número real dado.

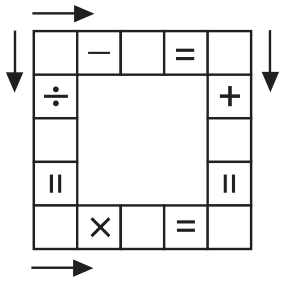
30. Considere, num plano, uma infinidade de pontos. Sabendo-se que a distância entre dois quaisquer desses pontos é um número inteiro, mostre que eles são colineares.

...probleminhas

1. Um homem entra numa livraria, compra *Pequenos Golpes*, que custa 20 reais, e paga com uma nota de 100 reais. Sem troco, o livreiro vai até a banca de jornais e troca a nota de 100 por 10 notas de 10 reais. O comprador leva o livro e 8 notas de 10 reais. Em seguida entra o jornaleiro dizendo que a nota de 100 reais é falsa. O livreiro troca a nota falsa por outra de 100, verdadeira. Sem o dinheiro do troco, sem o livro e sem a nota que deu ao jornaleiro, qual foi, afinal, o prejuízo do livreiro?

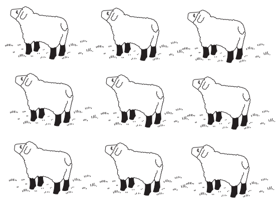
2. Uma pessoa, escrevendo a sucessão dos números naturais (começando pelo zero), interrompeu seu trabalho em um certo número. Qual é esse número se, até parar, a pessoa escreveu 7350 algarismos?

3. Escreva nas casas vazias algarismos de 1 a 8 de modo que as igualdades se verifiquem, no sentido das flechas.

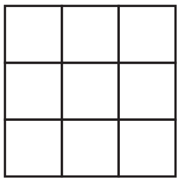


4. Qual é o maior número que se pode escrever usando única e exclusivamente quatro vezes o algarismo 2?

5. Construa três cercas quadradas de modo que todas as nove ovelhas fiquem presas e separadas.

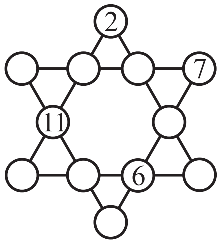


6. Preencha os quadrados com números distintos de 0 a 9 de modo que os números que se lêem nas linhas, colunas e diagonais sejam múltiplos de 11.



7. Uma pessoa cética quanto às boas intenções da humanidade afirma que 70% dos homens são desonestos, 70% são intolerantes e 70% são violentos. Se ela estiver certa, numa amostra perfeita de 100 homens, qual é o número mínimo de pessoas simultaneamente desonestas, intolerantes e violentas?

8. Complete a estrela mágica com os números 1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12 de modo que a soma de cada linha seja igual a 26.



9. Uma loja está fazendo uma promoção na venda de balas: Compre x balas e ganhe x% de desconto. A promoção é válida para compras de no máximo 60 balas. Carlos e Daniel compraram 30 e 45 balas, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais balas e gasto a mesma quantia, se empregasse melhor seus conhecimentos de Matemática?

10. Quatro vacas negras e três marrons dão tanto leite em cinco dias quanto três vacas negras e cinco marrons em quatro dias. Qual raça de vacas é melhor leiteira, as negras ou as marrons?

11. Em um povoado vivem 700 mulheres. 4% delas usam um pendente cada uma, metade das restantes usa dois pendentes cada uma e o restante não usa adornos. Quantos pendentes usa o total das mulheres?

12. 95% da massa de uma melancia de 10 quilos é constituída de água. A fruta é submetida a um processo de desidratação (que elimina apenas a água) até que a participação da água na massa de melancia se reduz a 90%. Qual a massa da melancia após o processo de desidratação?

13. O número 15873 é interessante, pois, se o multiplicarmos por um número de um algarismo e depois por 7, o resultado será um número formado apenas pelo algarismo escolhido. Por exemplo: 15 873 x 5 = 79 365 e 79 365 x 7 = 555 555. Por quê?

14. Se gato e meio come rato e meio em minuto e meio, em quanto tempo um gato come dois ratos?

15. Coloque parênteses para que a expressão $5 - 2 \times 1 + 4 \div 6 = 5$ se torne verdadeira.

16. Num concurso de televisão três concorrentes procuram acertar o número de caramelos contidos numa taça de cristal. José diz que há 260, Maria crê que há 274 e Carlota propõe que sejam 234. Sabe-se que um deles se enganou em 9 caramelos, outro em 17 e outro em 31. Pode-se deduzir qual o número de caramelos na taça?

17. Um número é formado por 7 algarismos escolhidos entre os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Se a soma de cada par de algarismos sucessivos é igual à soma do primeiro par e a soma de todos os algarismos é 15, qual é o número?

18. Um ciclista saiu para treinar levando consigo uma terceira roda de reposição. Durante o percurso de 60 km foi alternando as rodas de maneira que cada um rodasse uma distância igual à das outras. Quantos quilômetros rodou cada roda?

19. O Bernardo e o seu irmão Artur receberam no Natal um quebra-cabeça com 2005 peças. Nesse mesmo dia, decidiram começar a construí-lo. O Bernardo desafiou o seu irmão: “Vamos fazer um jogo. Você começa por colocar uma, duas, três ou quatro peças do quebra-cabeça. Em seguida, coloco eu uma, duas, três ou quatro peças, e assim sucessivamente. Quem colocar a última peça perde”. Entusiasmados, preparavam-se para começar a jogar, quando, de repente, um deles exclamou: “Jogue você como jogar, eu vou conseguir ganhar!”. Sabendo que ele tinha razão, qual deles disse isso e que estratégia planejou?

20. Sobre uma mesa há 137 fichas iguais, cada uma com um lado vermelho e outro azul, sendo que 10 estão com o lado vermelho para cima e as outras com o lado azul. Você está de olhos vendados e deve separar as fichas em dois grupos, cada um com a mesma quantidade de fichas vermelhas. Você pode virar as fichas, se necessário. Como fazer?

21. Um destacamento de soldados precisa atravessar um rio muito profundo e sem pontes. Eles pedem ajuda a dois meninos que estão passando pelo rio num barco. Porém, o barco é tão pequeno que nele só cabem os dois meninos ou um soldado de cada vez. Como eles fizeram para todos os soldados atravessarem o rio?

22. Num reino distante quaisquer dois cavaleiros ou são amigos ou inimigos e cada cavaleiro tem exatamente três inimigos. Nesse reino vigora a seguinte lei entre os cavaleiros: *Um inimigo do meu amigo é meu inimigo*. Quantas possibilidades há para o número de cavaleiros desse reino?

23. André escreveu um número inteiro em cada círculo e depois, em cada quadrado, escreveu o resultado da multiplicação dos números que estavam nos dois círculos vizinhos. Coloque na figura os números que foram apagados.

24. Num hotel para cães e gatos, 10% dos cães julgam que são gatos e 10% dos gatos julgam que são cães. Após cuidadosas observações, conclui-se que 20% de todos os hóspedes pensam que são gatos e que os restantes pensam que são cães. Se no hotel estão hospedados 10 gatos, quantos são os cães hospedados?

25. César e Sergião são amigos e gostam de fazer caminhadas. Enquanto César dá 4 passos, Sergião dá 5 passos, contudo, 2 passos de César equivalem a 3 passos de Sergião. Certo dia eles resolveram caminhar juntos, porém o César chegou atrasado e o Sergião já havia dado 20 passos. Quantos passos César teve que dar para alcançar seu amigo, que não alterou o seu ritmo até o momento do encontro?

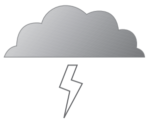
26. Ordene os cartões 1, 2, 3 e 4 de cor cinza e 5, 6, 7 e 8 de cor branca, de modo que todas as frases resultem verdadeiras.

1 Os dois seguintes são brancos.	**2** Os dois seguintes são de cores distintas.	**3** O anterior é da mesma cor que o seguinte.	**4** Há tantos brancos antes como depois.
5 O anterior é da mesma cor que o seguinte.	**6** O anterior é cinza.	**7** Os dois seguintes são da mesma cor.	**8** O anterior é branco.

27. Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem um número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem um número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos e filhas tem o casal?

28. Dois trens estão a uma distância de 200 km e se aproximam um do outro com uma velocidade de 50 km/h cada um. Uma mosca voa constantemente entre as locomotivas dos 2 trens, de um pára-choque ao outro, com uma velocidade de 75 km/h até o instante em que os trens se chocam e a mosca morre esmagada. Qual foi a distância total percorrida pela mosca?

29. Mostre que em qualquer ano existe pelo menos uma sexta-feira 13.



30. O que é 100% pior do que cair um raio sobre a sua cabeça?

Soluções dos problemas

1.

Solução 1

Dado $x \geq 1$, seja $N = \sqrt{x}$ e seja $0 \leq \theta < \pi/2$ tal que

$$x = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos 2\theta + 1}$$

$$\cos 2\theta + 1 = \frac{2}{x}$$

$$\cos 2\theta = \frac{2-x}{x} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x}$$

$$N = \frac{1}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x}\right]}$$

Dado x tal que $0 < x < 1$, use o método acima para $1/x$ e inverta o resultado.

Solução 2

Se $x \geq 0$ então $x = \mathrm{tg}^2\phi$ para algum $\phi \in [0, \pi/2[$. Então:

$$x = \mathrm{tg}^2\phi$$

$$x + 1 = \sec^2\phi$$

$$\frac{1}{x+1} = \cos^2\phi$$

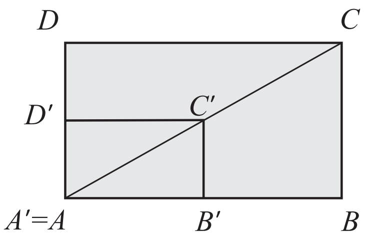
$$2\frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-x}{1+x} = \cos 2\phi$$

$$\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\phi$$

$$\frac{1}{2}\arccos\frac{1-x}{1+x} = \phi$$

$$\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1-x}{1+x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1-x}{1+x}\right)} = \mathrm{tg}\phi = \sqrt{x}.$$

2. Suponhamos inicialmente que as diagonais estejam na mesma reta. Nesse caso, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes e, portanto, $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$. Analogamente, vê-se que os triângulos ACD e $A'C'D'$ são semelhantes.



Logo, $\dfrac{A'D'}{AD} = \dfrac{D'C'}{DC} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$. Como os ângulos correspondentes dos retângulos são iguais e os lados correspondentes são proporcionais segue a semelhança dos retângulos $ABCD$ e $A'B'C'D'$.

Vamos agora provar a recíproca. Suponhamos que os retângulos sejam semelhantes. Temos então $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$ e, como os ângulos em B e B' são retos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Assim, os ângulos $C\hat{A}B$ e $C'\hat{A'}B'$ são congruentes e, portanto, as diagonais estão na mesma reta.

3. Como $21358ab$ é divisível por 99, temos que $21358ab = 99q$, q natural e $0 \leq a, b \leq 9$.

Logo,

$2135800 \leq 99q \leq 2135899$ ou $21573{,}7373... \leq q \leq 21574{,}7373...$. Sendo q um natural, então, $q = 21574$.

Assim, $21358ab = 99.\ 21574 = 2135826$, o que implica $a = 2$ e $b = 6$.

4. A resposta é *não*. Do teorema de Pitágoras temos a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$. Sendo a, b e c primos, não podem ser todos ímpares e, como $a > b$ e $a > c$, devemos ter $b = 2$ ou $c = 2$. Digamos $c = 2$. Teremos então:

$$a^2 - b^2 = 4$$

$$(a + b)(a - b) = 4$$

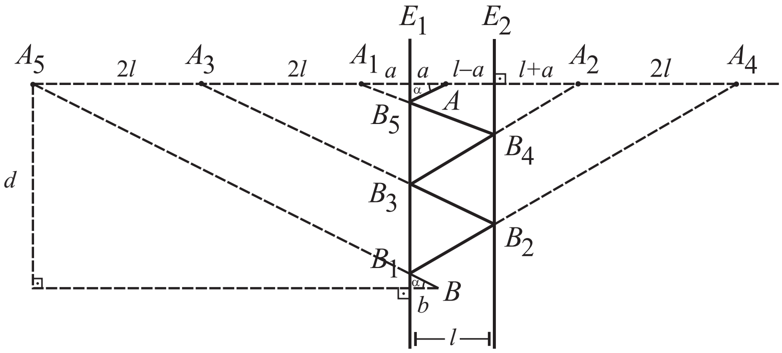
e analisando os possíveis valores de $a + b$ e $a - b$, que são 1, 2 ou 4, concluímos que a situação é impossível.

5. Seja x o comprimento do trem e v a sua velocidade. Assim:

$$v = \frac{171+x}{27} \quad \text{e} \quad v = \frac{x-9}{9}.$$

Resolvendo $x = 99$ m e $v = 10$ m/s.

6.



Construímos A_1 simétrico de A com respeito ao espelho E_1,
A_2 simétrico de A_1 com respeito ao espelho E_2,
A_3 simétrico de A_2 com respeito ao espelho E_1,
A_4 simétrico de A_3 com respeito ao espelho E_2,
A_5 simétrico de A_4 com respeito ao espelho E_1.

A trajetória do raio de luz é a poligonal $AB_5B_4B_3B_2B_1B$ onde

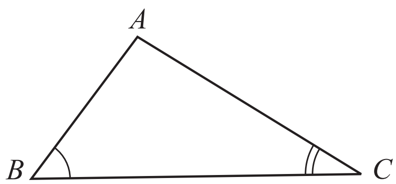
$$B_1 = BA_5 \cap E_1,\ B_2 = B_1A_4 \cap E_2,\ B_3 = B_2A_3 \cap E_1,$$
$$B_4 = B_3A_2 \cap E_2,\ B_5 = B_4A_1 \cap E_1.$$

Temos também $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{d}{4l+a+b}$, o que permite achar o ângulo de incidência, conhecendo-se a, b, l e d.

7.

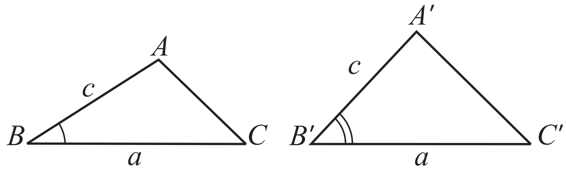
Lema 1

$AB < AC \Leftrightarrow \hat{C} < \hat{B}$



Lema 2

$AC < A'C' \Leftrightarrow \hat{B} < \hat{B'}$

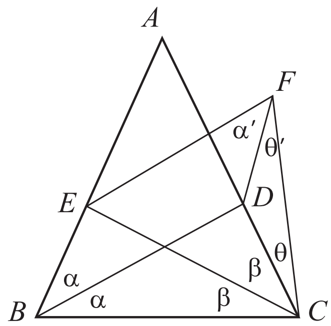


Na figura a seguir você vê o ΔABC e as bissetrizes BD e CE dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Seja $BD = CE$.

Construindo o paralelogramo $BDFE$, temos que $EF = BD = EC$ e portanto

$$\beta + \theta = \alpha' + \theta' \qquad (1)$$

Imagine que os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ sejam desiguais, $\hat{B} > \hat{C}$, por exemplo. Então teríamos:



$\hat{B} > \hat{C}$

$\alpha > \beta$

$\alpha' > \beta$ (paralelograma *BDFE*)

$\theta' < \theta$ (por (1))

$DC < DF$ (Lema 1)

$DC < BE$ (paralelograma *BDFE*)

$\alpha < \beta$ (Lema 2)

$\hat{B} < \hat{C}$ (Contradição!)

Como chegaríamos também a uma contradição supondo inicialmente que $\hat{B} < \hat{C}$ concluímos que $\hat{B} = \hat{C}$.

8.

Solução 1

Aplicamos a identidade $\log_a b \,.\, \log_b c = \log_a c$ e a desigualdade clássica entre a média aritmética e geométrica. É imediato que

$$\frac{1}{4}(\log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 5) \geq \sqrt[4]{\log_5 6 \log_6 7 \log_7 8 \log_8 5} = 1,$$

pois os logaritmos envolvidos são positivos. A igualdade vale se e somente se todos os termos forem iguais, mas isto no nosso caso não acontece, pois os três primeiros logaritmos são maiores que 1 e o quarto é menor que 1. Logo vale a desigualdade estrita.

Solução 2

É fácil provar que se $a > b > 1$ e $x > 1$, $\log_a x < \log_b x$. Transformando os termos do lado esquerdo da desigualdade pelo modelo

$$\log_5 6 = 1 + \log_5 \frac{6}{5}$$

basta provar que

$$\log_5 \frac{6}{5} + \log_6 \frac{7}{6} + \log_7 \frac{8}{7} + \log_8 \frac{5}{8} > 0\,.$$

Mas isso é verdade, pois em base 8,

$$\log_5 \frac{6}{5} + \log_6 \frac{7}{6} + \log_7 \frac{8}{7} + \log_8 \frac{5}{8} > \log_8 \frac{6}{5} + \log_8 \frac{7}{6} + \log_8 \frac{8}{7} + \log_8 \frac{5}{8} = \log_8 \frac{6.7.8.5}{5.6.7.8} = 0$$

9. Cada uma das 3 pessoas, A, B ou C, ao fazer uma afirmação, poderá estar mentindo (M) ou falando a verdade (V). Como o problema envolve afirmações das 3 pessoas, o conjunto das possibilidades será formado por ternos ordenados dos símbolos M ou V. Assim, por exemplo, (M, M, V) representaria o caso no qual A fala a verdade e B e C mentem. Nessas condições, o conjunto das possibilidades (ou, como dizem os probabilistas, o espaço amostral do experimento) seria formado pelos pontos:

(M, M, M); (V, M, M); (M, V, M); (M, M, V); (M, V, V); (V, M, V); (V, V, M) e (V, V, V).

Nesse espaço, vamos considerar os eventos:

$E - A$ fala a verdade

$F - C$ diz que B diz que A falou a verdade

O que o problema pede é a probabilidade condicional, $P(E/F)$, do evento E dado que ocorreu o evento F. Por definição, essa probabilidade é dada por:

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}\,.$$

É claro que o evento E é formado pelos pontos (V, V, V), (M, V, V), (V, M, V) e (M, M, V). Vamos, agora, identificar quais os pontos que pertencem ao evento F. Para maior clareza vamos considerar separadamente dois casos:

1º caso: A fala a verdade

Nesse caso, para que F ocorra, é necessário que o número de mentiras ditas por B e C seja par, pois só assim elas irão se anular, permitindo que

C diga que B disse que A falou a verdade. Segue-se, portanto, que, nesse caso, os pontos de F são (V, V, V) e (M, M, V).

2º caso: A mente

Um raciocínio análogo mostra que F só irá ocorrer se uma e apenas uma das pessoas B ou C mentir. Logo os pontos de F, nesse caso, são (M, V, M) e (V, M, M).

Segue-se, portanto, que o evento F é formado pelos quatro pontos, (V, V, V), (M, M, V), (V, M, M) e (M, V, M).

Admitindo-se, agora, a independência entre as afirmações das 3 pessoas, teremos:

$$P(F)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{13}{27}$$

Por outro lado, é fácil ver que o evento $E\cap F$ é formado pelos pontos (V, V, V) e (M, M, V) e portanto: $P(E\cap F) = 5/27$. Segue-se finalmente que: $P(E/F)=\dfrac{5/27}{13/27}=\dfrac{5}{13}$.

10. Observe inicialmente que $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ e que:

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{14\pi}{9}=2\cos\frac{8\pi}{9}.\cos\frac{6\pi}{9}=-\cos\frac{8\pi}{9}$$

Segue-se que $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{14\pi}{9}=0$. Desenvolvendo o quadrado dessa expressão vemos que aquilo que queremos calcular é igual a:

$$-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{2\pi}{9}+\cos^2\frac{8\pi}{9}+\cos^2\frac{14\pi}{9}\right)$$

Usando a relação $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, essa expressão se transforma em:

$$-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{16\pi}{9}+\cos\frac{28\pi}{9}+3\right)$$

Por outro lado,

$$\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{28\pi}{9}=2\cos\frac{16\pi}{9}\cos\frac{12\pi}{9}=2\cos\frac{16\pi}{9}\left(2\cos^2\frac{2\pi}{3}-1\right)=-\cos\frac{16\pi}{9}$$

de onde se segue que:

$$-\frac{1}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{16\pi}{9}+\cos\frac{28\pi}{9}+3\right)=-\frac{3}{4}.$$

11.

a) Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c inteiros e $a \neq 0$. Suponhamos $b^2 - 4ac = 23$. Segue-se que $b^2 - 4ac = 23$ é ímpar e, portanto, b é ímpar. Se b é ímpar, $b - 1$ e $b + 1$ são pares, e, portanto, $b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$ é múltiplo de 4. Mas $b^2 - 1 = 4ac + 22$ e, como 22 não é múltiplo de 4, segue-se que $b^2 - 4ac$ não pode ser igual a 23.

b)

1) É claro que a deve ser inteiro, uma vez que a soma das raízes é $-a$.

2) $a^2 - 24a$ deve ser o quadrado de um número inteiro.
Suponha $a^2 - 24a = n^2$, com n inteiro. Como $a^2 - 24a = (a-12)^2 - 144$, temos $(a-12)^2 = 12^2 + n^2$. Essa equação admite a solução trivial $n = 0$ e, nesse caso, $a = 0$ ou $a = 24$. Se n é diferente de zero, n e 12 podem ser pensados como os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é $(a - 12)$. O leitor deve verificar que existem 4 triângulos pitagóricos com um cateto igual a 12 (veja, por exemplo, **RPM** 47, p. 49).

São eles:

(5, 12, 13), (9, 12, 15), (12, 16, 20), (12, 35, 37)

para $n = 5$, $a = -1$ ou $a = 25$
para $n = 9$, $a = -3$ ou $a = 27$
para $n = 16$, $a = -8$ ou $a = 32$
para $n = 35$, $a = -25$ ou $a = 49$

Se acrescentarmos os valores correspondentes a $n = 0$, teremos exatamente dez valores de a que satisfazem as condições do problema.

12. Decorre da hipótese que cos $x = 0$ se, e somente se, cos $(x + y) = 0$ (verifique!). Ou seja, se um dos membros da igualdade que queremos mostrar não estiver definido, o outro também não estará. Suponhamos, então, que cos $(x + y) \neq 0$ e cos $x \neq 0$.

Ora, de $5 \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} 2x \cos y + \operatorname{sen} y \cos 2x$ e como

$\cos y \neq 0$ (pois, $|\operatorname{sen} y| \leq \frac{1}{5}$), $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ e $\cos 2x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ temos

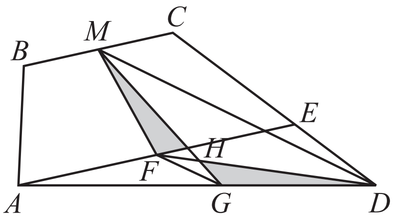
$$5\operatorname{tg} y = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} y \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad \text{o que implica}$$

$$5\operatorname{tg} y + 5\operatorname{tg} y \operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg}^2 x .$$

E, como de $\cos(x + y) \neq 0$ tem-se $1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq 0$, podemos deduzir

$\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \dfrac{6}{4}\operatorname{tg} x$, donde, finalmente $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{3}{2}\operatorname{tg} x.$

13. Traçar *AE // BC*. Pelo ponto médio *F* de *AE,* traçar *FG // MD*. (Quando *BC // AD*, *F* e *G* coincidem.) Afirmamos que *MG* é a solução. De fato, pela construção, área *MBADF* = área *MFDC* .



Por meio de *MG*, estamos tirando da área direita o triângulo *MFH* e acrescentando o triângulo *HGD* para obter *MGDC*. Porém, área *MFH* = área *HGD*, pois *FG // MD* e *MHD* é comum aos triângulos *MGD* e *MFD*. Logo, área *MGDC* = área *MFDC*. Do mesmo modo, área *MBAG* = área *MBADF*.

14. Se imaginarmos que todas as bolas serão retiradas da urna, existirão ao todo $n!$ configurações numéricas possíveis para esse experimento. O nosso problema é contar em quantas dessas configurações teremos, na k-ésima retirada $(2 \leq k < n)$, pela primeira vez, uma bola cujo número seja maior do que o de todas as anteriores.

Em primeiro lugar, vamos observar que o evento no qual estamos interessados não depende dos particulares números das bolas que sairão nos k primeiros lugares, mas apenas da ordem em que eles sairam.

Existem $\binom{n}{k}$ escolhas possíveis para esses números. Uma vez fixados esses k números, para que o evento ocorra, duas condições precisam ser satisfeitas:

1) A bola com o maior número (entre os k escolhidos) deve sair na k-ésima retirada.

2) A bola com o 2º maior número deve sair na primeira retirada.

Observe que a primeira condição garante que o processo pára na k-ésima retirada, enquanto que a segunda garante que ele não pára antes da k-ésima retirada. As outras $k-2$ bolas podem ocupar qualquer posição, o que nos dá um total de $(k-2)!$ configurações possíveis. De maneira análoga, as $n-k$ bolas que sairão após a k-ésima retirada poderão aparecer em qualquer ordem, o que nos dá $(n-k)!$ possibilidades.

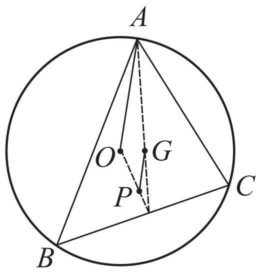
Segue-se que o número total de configurações nas quais, pela primeira vez, na k-ésima retirada, aparece uma bola cujo número é maior do que todas as anteriores, vale $\binom{n}{k}(k-2)!(n-k)!$ e, portanto, a probabilidade desse evento é $\dfrac{\binom{n}{k}(k-2)!(n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{k(k-1)}$ para $2 \le k < n.$

O caso $k = n$ tem que ser analisado em separado, pois o processo para no instante n não apenas quando as condições 1 e 2 estão satisfeitas para $k = n$ (a probabilidade de que isso ocorra é $1/n(n-1)$), mas também quando elas não são satisfeitas em nenhum instante. Esta segunda hipótese ocorre se, e somente se, a bola com o número n sair na primeira retirada. (A probabilidade de isso ocorrer é, obviamente, $1/n.$) Para $k = n,$ a probabilidade desejada vale

$$\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1}.$$

15. Sejam O o centro da circunferência dada de raio R, M o ponto médio de BC e $P \in OM$ tal que $OM = 3PM$.

Para cada A na circunferência dada considere G o baricentro do ΔABC.



Como $\begin{cases} GM = \dfrac{AM}{3} \\ PM = \dfrac{OM}{3} \end{cases}$, então, $GP \,//\, OA$ e

$GP = \dfrac{OA}{3} = \dfrac{R}{3}$. Assim, G pertence à circunferência de centro P e raio $R/3$.

Observe que nos casos degenerados onde $A = B$ $(A = C)$ consideramos G no segmento BC com $BG = \dfrac{1}{3}BC$ $\left(GC = \dfrac{1}{3}BC\right)$.

Logo os baricentros dos triângulos ABC pertencem à circunferência de centro P e raio $R/3$.

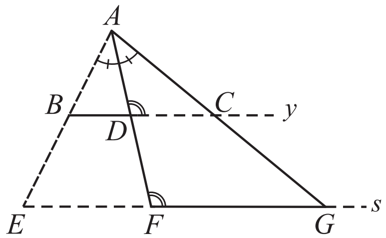
Reciprocamente, cada ponto dessa circunferência é baricentro de algum ΔABC com A na circunferência dada. (Por quê?)

16. Como $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ e $602 = 2.7.43$, devemos resolver o sistema

$$x - y = A$$
$$x^2 + xy + y^2 = B.$$

Como $0 < y < x < x^2 < B$, basta experimentar os pares (A, B) com $A < B$ tais que $A.B = 602$: $(1,602)$; $(2, 301)$; $(14, 43)$ e $(7, 86)$. Somente o par $(2, 301)$ fornece soluções inteiras, de onde temos que as soluções positivas são 11 e 9.

17. Os triângulos do enunciado podem ser considerados justapostos como ABD e AFG da figura.



Queremos mostrar que $\dfrac{BD}{FG} = \dfrac{AB}{AG}$.

Aplicado o teorema da bissetriz interna ao triângulo ABC, temos $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{CD}{AC}$.

Como $r \,//\, s$, temos $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{FG}{AG}$. Logo, $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{FG}{AG}$.

18. Vamos observar inicialmente que o conjunto A tem

$$\binom{10}{5} = 252 \text{ elementos.}$$

a) Sorteada a primeira combinação nos 251 elementos restantes, existe apenas uma combinação que não tem elementos em comum com a combinação sorteada. Segue-se que a probabilidade pedida vale 1/251.

b) Efetuando o 1º sorteio, existem $\binom{5}{4} = 5$ grupos de 4 elementos da combinação sorteada que podem ser combinados com qualquer um dos 5 elementos que não pertencem a ela para formar uma combinação que tenha 4 elementos em comum com a sorteada. Segue-se que a probabilidade pedida vale 25/251.

19. Sejam h = altura da pirâmide, R = raio da circunferência circunscrita a um pentágono regular convexo de lado a.

Então $a = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ ou $\dfrac{4a^2}{10 - 2\sqrt{5}} = R^2$.

Temos que a, h e R formam um triângulo retângulo e assim

$$h^2 = a^2 - R^2 = a^2 - \frac{4a^2}{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{a^2(50 - 10\sqrt{5})}{100}$$

Logo, $h = a\dfrac{(\sqrt{50 - 10\sqrt{5}})}{10}$.

20.

Solução 1

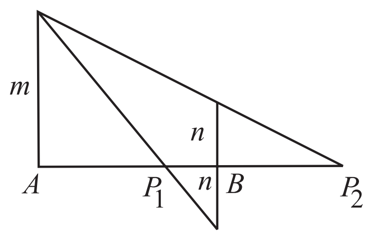
Quando $m/n = 1$, o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{m}{n}$ é a mediatriz de AB, pois $\left(\dfrac{PA}{PB} = 1 \Leftrightarrow P \in\right.$ mediatriz de AB).

Quando $m/n \neq 1$, consideraremos, sem perda de generalidade, o caso $m > n > 0$.

a) A construção ao lado mostra que existem dois pontos P_1, P_2 da reta AB tais que

$$\frac{P_iA}{P_iB} = \frac{m}{n},\ i = 1, 2.$$

A verificação se faz através de semelhança de triângulos.



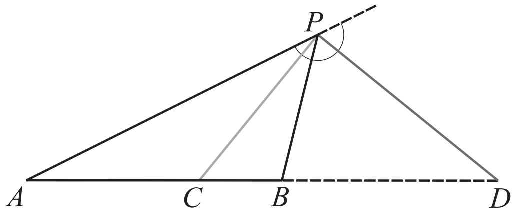
b) Os pontos P_1, P_2 obtidos em a) são os únicos da reta AB tais que

$\frac{P_iA}{P_iB} = \frac{m}{n}$. (Por quê?)

c) Se P é um ponto fora da reta AB tal que $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$, mostraremos que P pertence à circunferência C que passa por P_1 e P_2 e tem diâmetros P_1P_2. De fato:

Sendo PC bissetriz interna do ângulo $A\hat{P}B$, segue do teorema da bissetriz interna:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}.$$



Sendo PD bissetriz externa do ângulo $A\hat{P}B$, segue do teorema da bissetriz externa: $\frac{AD}{BD} = \frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$.

Como C e D são pontos da reta AB tais que $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$, então por b), $\{C, D\} = \{P_1, P_2\}$ (A existência do ponto D é garantida por termos $PA \neq PB$).

Logo, P pertence à circunferência C, já que as bissetrizes interna e externa são perpendiculares.

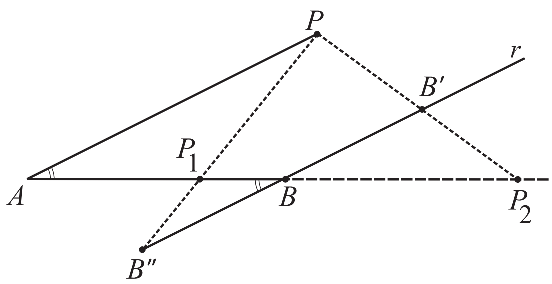
d) Reciprocamente, dado um ponto P na circunferência C, mostremos que $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ e então concluiremos que o lugar geométrico dos pontos P é a circunferência C.

Tracemos por B a reta r paralela a AP. Temos:

$$\frac{AP}{BB'} = \frac{AP}{BP_2} = \frac{m}{n} \text{ (de } \Delta APP_2 \approx \Delta BB'P_2\text{)}$$

$$\frac{AP}{BB''} = \frac{AP_1}{BP_1} = \frac{m}{n} \text{ (de } \Delta APP_1 \approx \Delta BB''P_1\text{).}$$

Logo, $BB' = BB''$, isto é, PB é mediana do triângulo retângulo $PB'B''$. Isso implica (verifique!) $PB = BB'' = BB'$ e, portanto, $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$.



Observação: O raio da circunferência C é $\frac{ABmn}{m^2 - n^2}$, obtido de:

$$AP_1 = AB - P_1B = AB - AP_1\frac{n}{m} \Rightarrow AP_1 = \frac{ABm}{m+n},$$

$$BP_2 = AP_2 - AB = \frac{m}{n}BP_2 - AB \Rightarrow BP_2 = \frac{ABn}{m-n}.$$

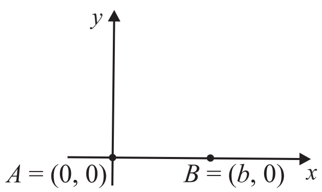
Solução 2

O problema é clássico em Geometria Analítica, com a solução

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}} = \frac{m}{n}, \text{ de onde}$$

$n^2(x^2 + y^2) = m^2(x^2 + y^2 - 2bx + b^2)$ ou

$x^2(n^2 - m^2) + y^2(n^2 - m^2) + 2m^2bx - m^2b^2 = 0.$



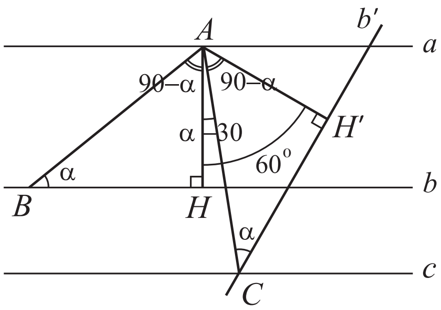
Se $n = m$, obtemos a mediatriz; se $n \neq m$, obtemos a circunferência.

21. Sejam a e b, respectivamente, os algarismos das dezenas e das unidades do número procurado. Como $a \times 10 + b + b \times 10 + a = 11(a + b)$ é um quadrado perfeito, então 11 é um divisor de $a + b$. Observando que $1 \leq a + b \leq 18$, resulta $a + b = 11$. Verificando as possibilidades para a e b, encontramos os seguintes números: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 e 92.

22. Considere a, b, c retas paralelas coplanares.

A seguinte construção pode ser feita usando apenas régua e compasso.

Fixamos $A \in a$ e fazemos uma rotação de 60^o, no sentido anti-horário, da reta b em torno de A, obtendo uma reta b' que corta a reta c no ponto C.



Fazemos a rotação, no sentido horário, do ponto C em torno de A, obtendo na interseção com b o ponto $B \in b$.

Os triângulos retângulos $AH'C$ e AHB são congruentes, uma vez que $AH = AH'$ e $AB = AC$.

Logo, $A\hat{C}H' = A\hat{B}H = \alpha$, que implica $B\hat{A}C = 90^\circ - \alpha + (\alpha - 30^\circ) = 60^\circ$, de modo que o ΔABC é eqüilátero.

23. Um grupo de $2n$ pessoas é formado por n homens e n mulheres.

Existem $\binom{2n}{n}$ maneiras de escolhermos um conjunto de n pessoas desse grupo. Vamos determinar em quantos desses conjuntos existem exatamente k homens. Para isso vamos observar que os k homens podem ser escolhidos de $\binom{n}{k}$ maneiras e as $n - k$ mulheres de $\binom{n}{n-k}$ maneiras. Segue-se que, para $k = 0, 1, ..., n$ o número de escolhas de n pessoas que contêm exatamente k homens será dado por $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$.

Conclui-se portanto que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

24. Considere o produto dos 3 números pares consecutivos:

$$88.10^6 < (x-2)\,x\,(x+2) \;= x^3 - 4x < x^3$$

Temos:

$85184000 = 440^3 < 88.10^6 < 450^3 = 91125000$

Três números pares consecutivos podem terminar em:

0, 2, 4

2, 4, 6

4, 6, 8

6, 8, 0

8, 0, 2.

O único produto dessas triplas que termina em 2 é $4.6.8 = 192$, logo os números são 444, 446, 448 cujo produto é 88714752. Portanto, os algarismos procurados são 7, 1, 4, 7, 5.

25. Sejam $r_1, r_2, ..., r_7$ as 7 raízes da equação. Temos então:

$$r_1 + r_2 + ... + r_7 = -2$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_6r_7 = 3$$

Segue-se $4 = (r_1 + r_2 + ... + r_7)^2 = r_1^2 + r_2^2 + ... + r_7^2 + 6$ e, portanto,

$\sum_1^7 r_i^2 = -2$, o que mostra que nem todas as raízes podem ser reais.

26. Sejam $x_i \in R$, $i = 1;..., 100$ tais que $P(x_i) = 0$ para todo i entre 1 e 100.

Suponhamos, por contradição, que $x_i < 7$, $i = 1, ..., 100$.

Então como $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{100})$, temos que:

$$1 < P(7) = (7 - x_1)(7 - x_2)...(7 - x_{100}).$$

Logo,

$$1=\sqrt[100]{1}<\sqrt[100]{(7-x_1)(7-x_2)\ldots(7-x_{100})}\leq$$

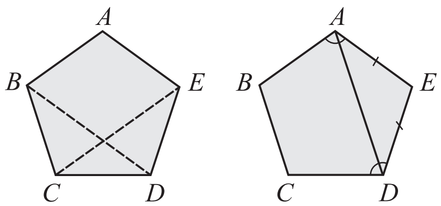
$$\frac{7-x_1+7-x_2+\ldots+7-x_{100}}{100}\Rightarrow 1<\frac{700-\sum_{i=1}^{100}x_i}{100}.$$

Mas como $P(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_{100})=x^{100}-600x^{99}+\sum_{j=0}^{98}a_jx^j$ então

$\sum_{i=1}^{100}x_i=600.$ Logo, $1<\dfrac{700-600}{100}=1$ (absurdo!).

27. Como o pentágono tem todos os lados iguais, basta mostrar que ele é inscritível.

1º caso: os ângulos congruentes são consecutivos $\hat{A}\equiv\hat{B}\equiv\hat{E}$. Os quadriláteros $BAED$ e $EABC$ são trapézios isósceles, logo inscritíveis e a circunferência que passa pelos pontos B, A, E e D também passa pelos pontos E, A, B e C.



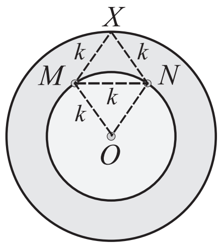
2º caso: os ângulos congruentes não são consecutivos $\hat{A}\equiv\hat{B}\equiv\hat{D}$. O ΔAED é isósceles, logo os seus ângulos da base AD são congruentes e, portanto, o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio isósceles.

Portanto, $\hat{B}\equiv\hat{C}$, recaindo no 1º caso.

28. Se existe uma raiz racional, temos $b^2 > 4ac$ e também temos que $b^2 - 4ac$ é um quadrado perfeito m^2. Sendo b ímpar, b^2 é ímpar e, como $4ac$ é par, temos $b^2 - 4ac$ ímpar, implicando m^2 ímpar, que, por sua vez, implica m ímpar. Como $b^2 - m^2 = 4ac$ e a diferença dos quadrados de dois números ímpares é sempre um múltiplo de 8 (verifique!), conclui-se que $4ac$ é múltiplo de 8. Mas, sendo a e c ímpares, $4ac$ não é um múltiplo de 8; logo, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raízes racionais.

29. Suponha que a afirmação seja falsa, isto é, os pontos do plano foram pintados usando-se três cores A, B e C e todos os segmentos de comprimento k possuem extremidades de cores diferentes.

Seja O um ponto do plano e, sem perda de generalidade, suponhamos que ele seja da cor A. Sejam Γ_1 e Γ_2 as circunferências de centro O e raios respectivamente k e $k\sqrt{3}$.



Todos os pontos de Γ_1 terão sido pintados de cor B ou C, pois, caso contrário, haveria um raio (segmento) Γ_1 de cujas extremidades seriam ambas da cor A.

Tome um ponto X em Γ_2 e pontos M e N em Γ_1 satisfazendo:

$$\overline{MN} = k = \overline{MX} = \overline{NX}.$$

O valor do raio de Γ_2, $k\sqrt{3}$, garante a existência do losango $OMXN$.

Assim, M e N possuem cores diferentes (B e C) e X deve ter a cor A. Como todos os pontos de Γ_2 podem ser obtidos dessa forma, provamos que todos eles estão pintados com a cor A, o que é uma contradição, pois sobre Γ_2 existem cordas de comprimento k.

30. Seja S o conjunto dado. Suponhamos que seus pontos não são colineares.

Sejam A e B dois deles. Dado $P \in S$, temos $|PA - PB| \leq AB$ com $AB = n \in N$, logo P pertence a uma das $n + 1$ hipérboles de focos A e B dadas por $|PA - PB| = k$ com $k \in N$, $0 \leq k \leq n$.

Observamos que, para $k = 0$ e para $k = n$ (casos nos quais o ponto P pertence à mediatriz de AB ou à reta AB), temos hipérboles degeneradas.

Considere $C \in S$ tal que A, B, C não sejam colineares. Todo ponto $P \in S$ pertence a um outro feixe de $m + 1$ hipérboles de focos A e C, onde $AC = m \in N$.

S está contido na intersecção dos dois feixes (finitos) de hipérboles. A intersecção de duas hipérboles é sempre finita, se elas forem distintas. Como os dois feixes não tem nenhuma hipérbole em comum (convença-se disso), seguiria que S é finito. Contradição!

Respostas dos ...probleminhas

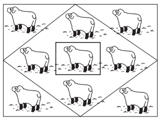
1. 100

2. 2114

3. Começando no canto superior esquerdo e girando no sentido anti-horário: 6, 3, 2, 4, 8, 8, 7, 1, 5.

4. $2^{2^{22}}$

5.

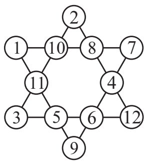


6.

2	7	5
8	0	3
6	4	9

7. 10

8.



9. Daniel

10. As vacas marrons.

11. 700

12. 5 kg

13. Porque $15873 \times 7 = 111\,111$.

14. Em 3 minutos.

15. $(5-2) \times (1 + 4 \div 6) = 5$

16. 243

17. 3131313

18. 40 km

19. Como $2005 = 4 + 400 \times 5 + 1$, o primeiro a jogar, Artur, pode colocar 4 peças e, em seguida, coloque o Bernardo o que colocar, Artur, pode jogar de modo que, na sua jogada e na anterior, o total de peças colocadas seja 5. Com essa estratégia, Artur vence e foi ele quem disse a frase.

20. Separe um grupo de 10 fichas quaisquer e vire-as. Este grupo e o grupo das fichas restantes ficam com o mesmo número de fichas vermelhas.

21. O menino *A* fica na margem oposta à margem na qual estão os soldados e o menino *B* leva o barco até os soldados. O primeiro soldado atravessa o rio e o menino *A* traz o barco de volta. Os dois meninos atravessam o rio, o menino *A* fica e o menino *B* leva novamente o barco até os soldados. O segundo soldado atravessa o rio e...

22. 4 ou 6

23. No sentido horário, a partir do 85: 5, 45, 135, 15, 8 e 17.

24. 70

25. 80 passos

26. 2, 5, 3, 7, 4, 1, 6 e 8

27. 4 filhos e 3 filhas

28. 150 km

30. Cair um diâmetro.

RPM – Revista do Professor de Matemática
Caixa Postal 66281 CEP 05311-970
São Paulo, SP
www.rpm.org.br
rpm@ime.usp.br
telefone/fax: (11) 3091 6124